



Universidad Autónoma del Carmen



Facultad de Ingeniería

“Control de Modo Deslizante para un Péndulo tipo Acrobot sobre un carro”.

Tesis de Maestría

Presenta:

Ing. Daniel Iván Arévalo Carrillo

Director de tesis:

Dr. Hussain Alazki

Co-director de tesis:

Dr. Alexander S. Poznyak

Ciudad del Carmen, Campeche, agosto de 2018

Resumen

Esta tesis aborda del modelado matemático del sistema no lineal de un Acrobot sobre un carro a través del método clásico de Euler-Lagrange. Además, se proponen dos estrategias de control robusta para lograr la estabilización de postura en posición invertida de dicho sistema en un marco de referencia físico no inercial. Las metodologías de control corresponden a los algoritmos de control de Modos Deslizantes convencional, y SúperTorsión. Ambas técnicas de control, resultan ser muy efectivas para rechazar incertidumbres, y efectos no inerciales derivadas del marco de referencia acelerado al que se encuentra sujeto el mecanismo del Acrobot sobre un carro. Finalmente, la implementación efectiva de los esquemas de control propuesto se ilustran mediante simulaciones numéricas.

Abstract

This thesis deals with the mathematical modeling of the non-linear system of an Acrobot on a car, through the classical method of Euler-Lagrange equations. In addition, two robust control strategies are proposed to achieve the attitude stabilization of the inverted position of this system in a non-inertial physical framework. The control methodologies correspond to the control algorithms of conventional Sliding Modes, and Super-Twisting. Both control techniques are very effective rejecting modeling uncertainties, and the non-inertial effects derived from the accelerated reference frame to which the Acrobot mechanism on a car is attached. Finally, the effective implementation of the proposed control schemes is illustrated by numerical simulations.

Lista de símbolos

| | |
|--------------------|--|
| S | Sistema de puntos materiales |
| O | Origen de sistema coordenado |
| O' | Origen de sistema coordenado |
| m_i | Masa de una partícula |
| \vec{r}_i | Vector de posición de una partícula |
| \vec{v}_i | Vector de velocidad de una partícula |
| ψ | Polo de un sistema de partículas |
| \vec{r}_ψ | Vector de posición del polo |
| E_c | Energía cinética |
| \vec{p} | Impulso o cantidad de movimiento |
| \vec{j} | Momento de impulso |
| \vec{f} | Fuerza vectorial |
| m | Masa de un cuerpo rígido |
| \vec{r}_{CI} | Centro Inercial |
| \vec{v}_{CI} | Velocidad de centro inercial |
| \vec{v}_O | Velocidad absoluta |
| $\vec{v}_{O',CI}$ | Velocidad relativa del centro de inercia |
| d_i | Distancia entre dos puntos |
| $I_{\vec{\omega}}$ | Momento de inercia con respecto de un eje |
| $\vec{\omega}$ | Velocidad angular |
| $\vec{\epsilon}$ | Aceleración angular |
| \vec{w} | Aceleración traslacional |
| \mathcal{L} | Función de Lagrange |
| \mathbf{q} | Coordenadas generalizadas |
| E_p | Energía potencial |
| D | Matriz de inercia |
| C | Matriz de Coriolis |
| G | Vector de gravedad |
| l_{ci} | Distancia de un pivote al centro de inercia de eslabones de un péndulo |
| L_i | Longitud de eslabones de un péndulo |
| g | Aceleración gravitatoria |

Lista de símbolos

| | |
|-----------------|--|
| u | Entrada de control |
| K | Ganancia de controlador |
| s | Superficie de deslizamiento |
| \mathbf{S} | Variables de deslizamiento cuando $s=0$ |
| V | Función de Lyapunov |
| t_r | Timepo de alcance |
| $\varphi(x, t)$ | Función desconocida acotada |
| \mathbb{I}_i | Tensor de inercia |
| θ_i | Desplazamiento angular |
| τ_i | Fuerzas generalizadas/entradas de un sistema |
| \mathbf{e} | Vector unitario |
| δ_i | Efecto no inercial |
| e_i | Error de posición |

Lista de acrónimos

| | |
|------|---|
| MD | Modos Deslizantes (Sliding Modes) |
| ST | SúperTorsión (Super-Twisting) |
| CMD | Control por Modos Deslizantes (Sliding Modes Control) |
| TORA | Oscilador Traslacional Actuador Rotacional (Traslacional Oscilator-Rotational Actuator) |
| VSS | Sistemas de Estructura Variable (Variable System Structures) |
| CI | Centro Inercial |

Índice general

| | |
|---|-------------|
| Lista de símbolos | VII |
| Lista de acrónimos | IX |
| Índice de figuras | XIII |
| Índice de tablas | XV |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Estado del arte | 2 |
| 1.2. Justificación | 4 |
| 1.3. Objetivo General | 4 |
| 1.4. Objetivos Específicos | 4 |
| 1.5. Problemática | 4 |
| 1.6. Organización de la tesis | 5 |
| 2. Modelado de sistemas mecánicos | 7 |
| 2.1. Fundamentos para el modelado de sistemas mecánicos | 7 |
| 2.1.1. Leyes de Newton | 7 |
| 2.1.2. Propiedades del Centro Inercial | 10 |
| 2.1.3. Teorema de Steiner | 12 |
| 2.1.4. Sistemas no inerciales | 13 |
| 2.1.4.1. Segunda Ley de Newton con respecto de un sistema relativo | 14 |
| 2.2. Ecuaciones dinámicas de Lagrange | 15 |
| 2.3. Sistemas Mecánicos Tipo Péndulo | 16 |
| 2.3.1. Péndulo-Carro | 16 |
| 2.3.2. Doble péndulo | 17 |
| 2.3.3. Péndulo doble sobre un carro | 19 |
| 3. Control por Modos Deslizantes | 23 |
| 3.1. Antecedentes | 23 |
| 3.2. Fundamentos de Modos Deslizantes | 24 |

ÍNDICE GENERAL

| | |
|--|-----------|
| 3.2.1. Solución de Flippov | 27 |
| 3.2.2. Efecto chattering | 30 |
| 3.3. Estabilidad de Lyapunov | 30 |
| 3.3.1. Método directo de Lyapunov | 31 |
| 3.4. Diseño de un controlador por Modos Deslizantes | 33 |
| 3.5. SúperTorsión | 34 |
| 3.5.1. Fundamentos del algoritmo de SúperTorsión | 34 |
| 3.5.2. Diseño de controlador por SúperTorsión | 36 |
| 4. Formulación del problema | 39 |
| 4.1. Sistema Acrobot sobre un carro con marco de referencia mecánico no inercial | 39 |
| 4.1.1. Modelo dinámico: ecuaciones de energía y ecuaciones de Lagrange. | 39 |
| 4.1.2. Espacio de estados del sistema Acrobot sobre un carro | 46 |
| 4.2. Control por Modos Deslizantes | 48 |
| 4.3. Control por SúperTorsión | 50 |
| 5. Simulación y resultados | 53 |
| 5.1. Simulación del sistema Acrobot sobre un carro sin acción de control | 53 |
| 5.2. Simulación del sistema Acrobot sobre un carro con Control por Modos Deslizantes | 56 |
| 5.3. Simulación del sistema Acrobot sobre un carro con Control por SúperTorsión | 60 |
| Trabajo futuro | 65 |
| Conclusión | 67 |
| Bibliografía | 69 |
| Anexo | 73 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 2.1. Un conjunto de puntos materiales referidos a un sistema coordenado. | 8 |
| 2.2. Relación entre el polo ψ y el origen \mathcal{O} | 9 |
| 2.3. Relación entre el sistema absoluto y el auxiliar. | 11 |
| 2.4. Cuerpo plano rotando en su plano respecto del pivote \mathcal{O} | 12 |
| 2.5. Sólido rotando alrededor de un eje que no pasa por su centro inercial. | 13 |
| 2.6. Diagrama de distancias a los ejes $\mathcal{O}\mathcal{O}'$ y $\psi\psi'$ de un punto $i\epsilon\mathcal{S}$ | 13 |
| 2.7. sistema Péndulo-Carro | 17 |
| 2.8. Péndulo doble. | 18 |
| 2.9. Péndulo doble sobre un carro. | 20 |
| | |
| 3.1. Modos Deslizantes en un sistema tipo relé. | 24 |
| 3.2. Plano de estados ($\dot{y}y$) de dos sistemas inestables. | 25 |
| 3.3. Plano de estados de un VSS. | 26 |
| 3.4. Implementación de alta ganancia en modos deslizantes. | 27 |
| 3.5. Modos Deslizantes por Flippov. | 28 |
| 3.6. Función signo. | 29 |
| 3.7. Modos deslizantes. | 29 |
| 3.8. Fase de trayectorias-SuperTorsión. | 35 |
| | |
| 4.1. Sistema Acrobot bajo un marco de referencia no inercial. | 40 |
| 4.2. Eslabón 1 del acrobot. | 42 |
| 4.3. Eslabón 2 del acrobot. | 43 |
| | |
| 5.1. Diagrama de bloques Acrobot sobre un carro sin control. | 54 |
| 5.2. Respuesta de estados de posición del acrobot con entrada libre. | 55 |
| 5.3. Respuesta de estados posición del acrobot bajo aceleración constante. | 55 |
| 5.4. Respuesta de estados de posición del acrobot con entrada libre. | 56 |
| 5.5. Respuesta de estados posición del acrobot bajo aceleración constante. | 56 |
| 5.6. Matlab-Simulink model. | 57 |
| 5.7. Respuesta estado x_1 y error de estado e_1 con Modos Deslizantes. | 58 |
| 5.8. Respuesta estado x_1 y error de estado e_1 con Modos Deslizantes. | 59 |
| 5.9. Respuesta estado x_3 y estado x_4 con Modos Deslizantes. | 60 |
| 5.10. Programa en bloques del control por SúperTorsión en Matlab/simulink. | 61 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| 5.11. Respuesta estado x_1 y error de estado e_1 con SúperTorsión. | 62 |
| 5.12. Respuesta estado x_2 y error de estado e_2 con SúperTorsión. | 63 |
| 5.13. Respuesta estado x_3 y estado x_4 con SúperTorsión. | 63 |

Índice de tablas

| | |
|---|----|
| 4.1. Parametetros del sistema. | 41 |
| 5.1. Constantes físicas del sistema Acrobot sobre un carro. | 54 |
| 5.2. Parámetros del modelo - CMD. | 58 |
| 5.3. Parámetros de modelo - SuperTwisting. | 61 |

Capítulo 1

Introducción

Los péndulos son sistemas mecánicos ampliamente estudiados en las áreas de robótica y teoría de control, principalmente porque la mayoría de los mecanismos con múltiples eslabones o robots manipuladores pueden verse como múltiples péndulos acoplados. Por este motivo, el estudio de esta clase de sistemas está orientado al diseño de técnicas de control que a partir de su dinámica, puedan realizar una tarea de control de manera eficiente. Uno de los sistemas de péndulo más usados y estudiados en teoría de control, desde los años cincuenta, es el péndulo invertido. Han sido utilizados para probar técnicas de control lineal y no lineal para estabilización de sistemas inestables. Este mecanismo, en su configuración invertida, puede presentarse como un péndulo simple o como un péndulo montado sobre un carro, y consiste en una barra unida a un pivote fijo o a un pivote móvil, respectivamente. La experimentación con péndulos se debe principalmente a las características no-lineales que exhibe su comportamiento. Además, el péndulo puede presentarse en muy diversas configuraciones: péndulo invertido, doble péndulo, péndulo carro, etc.

A su vez, el péndulo doble se puede presentar en dos configuraciones; como Pendubot o como Acrobot. El Acrobot es un brazo robótico planar de dos uniones de revoluta, con un actuador en el codo, pero sin actuador en el hombro. El Acrobot recibe su nombre del hecho de que asemeja a un acróbata de barras paralelas, obteniendo el impulso para columpiarse, de su cadera. El estudio de este tipo de sistemas de doble péndulo es muy importante en el área de la robótica debido a la similitud que tiene con extremidades como los son brazos y piernas, y que tienen aplicación en robots caminantes y en brazos manipuladores. Además, al ser un péndulo acoplado, exhibe una dinámica muy interesante para el desarrollo de estrategias de control. Es en este sentido, que durante la formulación matemática de dichas estrategias, se debe tomar en cuenta no solo la dinámica propia del sistema, sino también perturbaciones externas, inexactitudes matemáticas o efectos no inerciales. Este último efecto, ocurre cuando un sistema físico no está fijo a una base o superficie, o la superficie en la que está montado es móvil, por lo que su marco de referencia inercial se encuentra acelerado, en tal caso se le conoce como marco de referencia no inercial. Estos efectos se presentan como reacciones al movimiento no inercial que experimenta un sistema físico, y puede llegar

a causar inestabilidad a tal punto que un algoritmo de control podría llegar a fallar. Un área del control que presenta una posible alternativa para lidiar con dinámicas indeseadas en sistemas mecánicos como el péndulo Acrobot, es el control robusto; el cual precisamente puede llegar a rechazar dinámicas y perturbaciones desconocidas de una planta. Dentro de esta subrama, se encuentra el método de control por MD (Modos Deslizantes) y ST (SúperTorsión), el cual es un método que altera la dinámica de un sistema no lineal mediante la aplicación de una señal de control discontinua que obliga al sistema a "deslizarse" hasta alcanzar algún punto de estabilidad. Este método ofrece una gran capacidad para el desarrollo de algoritmos de control en sistemas no lineales como los péndulos. Así pues, las tareas de control más habituales para el Acrobot son el problema de balanceo y el problema de postura. En la primera tarea se busca hacer columpiar al Acrobot para que alcance su posición invertida, y para la segunda se busca estabilizar al Acrobot en un punto de equilibrio inestable. El estudio de este tipo de sistemas de doble péndulo es muy importante en el área de la robótica debido a la similitud que tiene con extremidades como los brazos y piernas, y que tienen aplicación en robots caminantes y en brazos manipuladores. En el presente trabajo se abordará el estudio de un péndulo tipo Acrobot montado sobre un carro en un sistema de referencia no inercial para su estabilización en su posición invertida por medio de técnicas de control robusta basadas en MD y ST.

1.1. Estado del arte

El péndulo invertido es un sistema no lineal clásico, estudiado en investigación de control y robótica, debido a su conocida respuesta intrínsecamente inestable. Este mecanismo presenta muchas variantes que agregan complejidad a su comportamiento físico y, por lo tanto, ofrecen un gran desafío para aplicar estrategias de control. La respuesta física de estos sistemas, cuando se encuentran acoplados a marcos de referencia no inercial [10, 6], se ve afectada por dinámicas que no estarían presentes en un sistema de referencia fijo. Estos efectos no inerciales incluyen fuerzas de reacción y movimientos relativos que pueden alterar el rendimiento global de un sistema de control, de tal forma que estos efectos deben tenerse en cuenta al diseñar una estrategia de control.

Entre los muchos mecanismos tipo péndulo, una variante que ha sido ampliamente estudiada en investigación de sistemas de control es el sistema Carro-Péndulo; que está constituido por péndulo simple invertido que gira libremente mientras está montado sobre un carro actuado [18]. Un sistema similar es el Oscilador Rotacional-Traslacional Actuado o TORA por sus siglas en inglés; este sistema mecánico consiste en una plataforma oscilante amortiguada con un resorte, que tiene una masa excéntrica giratoria unida a dicha plataforma [9]. Algunos otros sistemas tipo péndulo que presentan un gran reto para el diseño de estrategias de control son las variantes de doble péndulo, estos incluyen, El Pendubot, El Acrobot y El Doble Péndulo montado en un carro. Estos sistemas son mecanismos con movimientos planares; el primero se asemeja a un brazo humano ya que el par/torque de entrada proviene de su primera articulación u

hombro mientras que la segunda articulación o codo gira libremente [25]; y el segundo es similar a un gimnasta humano en barras paralelas, dado que el par/torque de entrada es proporcionado por la segunda articulación o cintura, mientras que la primera articulación (punto de apoyo) gira libremente [8]. El péndulo doble en un carro, por otro lado, consiste en un mecanismo de dos eslabones unido a una plataforma móvil actuada [20]. Todos estos sistemas mecánicos se pueden estudiar desde un marco de referencia no inercial [10, 6, 7], ya que un componente móvil particular (carro o enlace) se puede tomar como un marco acelerado (no inercial), y por lo tanto sus efectos pueden ser modelados.

Típicamente, algunos de los métodos de control aplicados a los sistemas antes mencionados se enfocan en lograr las tareas de elevación o balanceo y estabilización de postura; sin embargo, también deben tenerse en cuenta las incertidumbres, las perturbaciones y los efectos no inerciales del modelado, ya que pueden causar la falla de ciertos sistemas de control. Por esta razón, un enfoque de control robusto es más adecuado cuando se trata de tales efectos no deseados. Dentro de esta clasificación de control robusto, se encuentra el CMD (Control de Modos Deslizantes). Esta estrategia ofrece funciones útiles, como insensibilidad a la dinámica parasítica, perturbaciones externas / internas acotadas, gran precisión, dinámica de orden reducido del sistema compensado y convergencia en tiempo finito [31, 23]. Algunos trabajos de investigación sobre CMD han explotado estas características particulares con el fin de desarrollar estrategias de control para sistemas tipo péndulo. Por ejemplo, una estrategia de CMD con retropropagación (backstepping en inglés) se presentó en [1] para elevación y la estabilización de un sistema Carro-Péndulo que también se lidió con el rechazo de perturbaciones añadidas y la reducción de vibraciones. Un caso para el sistema TORA (siglás en inglés de Oscilador Traslacional Actuador Rotacional) se presenta en [35], donde se propone un controlador basado en MDC para estabilización global. Además, se propone un control robusto para el sistema de péndulo doble en [21] para seguimiento de referencia por MD; y el propuesto en [13] donde presentaron un sistema de doble péndulo-grúa; que es un péndulo doble en un carro, sin actuadores en las articulaciones y no invertido. Las tareas de control en este último sistema son reducción de oscilación y equilibrar una carga útil. A pesar de las características del CMD, del chattering (oscilaciones de alta frecuencia) siguen siendo un problema para la implementación de CMD; sin embargo, esto se puede reducir mediante un enfoque CMD de ST.

En los sistemas descritos, los efectos no inerciales son inducidos por componentes móviles que aceleran los sistemas de interés, tales como plataformas o carros deslizantes, o eslabones oscilantes. Además, la entrada de control se aplica generalmente en esta plataforma móvil; por ejemplo, en los sistemas Carro-Péndulo y Doble Pendulo sobre un Carro; en donde los carros realizan la acción de control. En este sentido, el sistema tipo péndulo que se presentará consiste en un robot Acrobot montado en un carro móvil no accionado. Esto cambia la ubicación donde la entrada de control se aplica, a la segunda articulación del péndulo y deja que la plataforma no accionada induzca efectos no inerciales. Además, el controlador robusto basado MD y ST que se propondrá para este mecanismo, y realizará la tarea de estabilización de postura del acrobot y el

rechazo de efectos no inerciales cuando el carro esté en movimiento.

1.2. Justificación

En muchos trabajos de investigación existen casos de estudio acerca de péndulos invertidos sobre un carro, en donde la acción de control es transmitida a través del carro para estabilizar el péndulo que se encuentra sobre éste. Sin embargo, en la literatura aún no se ha abordado al sistema Acrobot sobre un carro bajo los efectos de una dinámica no inercial en un marco de referencia acelerado. Por lo anterior, la implementación de una técnica de control por MD y ST para este sistema resultan algo novedoso e interesante debido a las grandes capacidades de estabilización, rechazo a perturbaciones desconocidas e insensibilidad ante parámetros variables que caracteriza a este tipo de controladores robustos.

1.3. Objetivo General

Diseñar y aplicar una estrategia de control por MD, y por ST al sistema Acrobot sobre un carro en un sistema de referencia mecánico no inercial para su estabilización de postura invertida.

1.4. Objetivos Específicos

- Presentar modelo matemático del sistema Acrobot sobre un carro no inercial, basado en ecuaciones de Lagrange en un sistema no-inercial.
- Diseño del controlador por MD.
- Diseño del controlador por ST.
- Estudio de estabilidad de MD.
- Estudio de estabilidad de ST.
- Simulación numérica del sistema en lazo cerrado.
- Discusión de resultados.

1.5. Problemática

La tarea de estabilización de postura en el péndulo invertido es un problema clásico y ampliamente estudiado en teoría de control. Para el caso particular del sistema Acrobot

sobre un Carro que se propone estudiar, el problema consiste en estabilizar el Acrobot alrededor en su postura invertida mientras este se balancea sobre una plataforma móvil o carro, usando únicamente el torque proporcionado por un actuador ubicado en su codo para estabilizarle. Este es un problema especialmente desafiante, ya que se busca no solo la estabilidad, sino la robustez del sistema ante efectos no inerciales mediante la aplicación de dos métodos de control basados en MD y ST.

1.6. Organización de la tesis

El presente trabajo está dividido en 5 capítulos, iniciando con la previa introducción sobre el tema. Esta sección es un pequeño resumen de la estructura que se explicará a detalle posteriormente. En el capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos del modelado matemático de sistemas mecánicos en un marco de referencia no inercial, el desarrollo de sus ecuaciones de movimiento através el metodo clásico de Lagrange, así como una breve explicación sobre algunos sistemas tipo péndulo existentes. Después, en el Capítulo 3 se presenta el marco teórico fundamentos de la estrategia de control por MD, y la técnica de ST. En el Capítulo 4 se desarrolla el metodo de modelado matemático presentado en el Capítulo 2, para el sistema mecánico del Acrobot sobre un Carro, y se plantean las superficies de deslizamiento para MD. y ST. En el Capítulo 5, se desarrollan las leyes de control basadas en MD y ST, y se aborda su análisis de estabilidad. Finalmente, se muestran los resultados obtenidos en la simulación del sistema Acrobot sobre un carro con control en lazo cerrado para ambas estrategias de control ya mencionadas.

Modelado de sistemas mecánicos

Las ecuaciones dinámicas de un sistema mecánico pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. El inconveniente que presenta este método es que el análisis se complica notablemente cuando aumenta el número de articulaciones del mecanismo. En estos casos, es conveniente emplear las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Además muchas relaciones mecánicas en sistemas físicos parten de la presuposición de que dichos sistemas no están acelerados. Los sistemas que cumplen con esta condición son conocidos como sistemas de referencia inercial. En este capítulo se analiza el modelado de sistemas físicos por medio de el Teorema König, las ecuaciones de Lagrange, y se presenta la descripción de sistemas cuya referencia absoluta sufre una aceleración. Finalmente, se presentan ejemplos de sistemas mecánicos tipo péndulo.

2.1. Fundamentos para el modelado de sistemas mecánicos

2.1.1. Leyes de Newton

Supóngase un conjunto de puntos materiales móviles ubicados en el espacio. Ahora dótese a tal espacio de un sistema coordinado con origen en algún punto \mathcal{O} . La estructura obtenida, denotada \mathcal{S} , se va a llamar sistema de puntos materiales. Para la partícula $i \in \mathcal{S}$, m_i representa su masa, en tanto que \vec{r}_i y \vec{v}_i denotan su vector de posición y su velocidad respecto de \mathcal{O} . La Fig.2.1 muestra estos aspectos.

Definición 2.1 Un polo es un punto ψ en el espacio. Si \vec{r}_ψ es el vector de posición de ψ respecto de \mathcal{O} , el vector

$$\vec{r}_{i,\psi} := \vec{r}_i - \vec{r}_\psi$$

se conoce como vector de posición (ver Fig.2.2).

Definición 2.2 Considerese el sistema de puntos materiales \mathcal{S} .

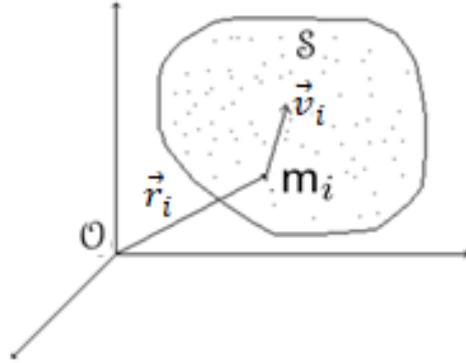


Figura 2.1: Un conjunto de puntos materiales referidos a un sistema coordenado.

1. La cantidad escalar

$$E_c := \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i v_i^2$$

recibe el nombre de energía cinética de \mathcal{S} .

2. La cantidad vectorial

$$\vec{p} := \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \vec{v}_i$$

se denomina impulso de \mathcal{S} .

3. La cantidad vectorial

$$\vec{j} := \sum_{i \in \mathcal{S}} [\vec{r}_{i,\psi}, m_i \vec{v}_i]$$

se conoce como momento del impulso de \mathcal{S} respecto al polo ψ .

Axioma 2.1 (Primera Ley de Newton) Toda partícula material no sujeta a estímulo externo alguno, sólo puede moverse con velocidad rectilínea uniforme o permanecer en reposo.

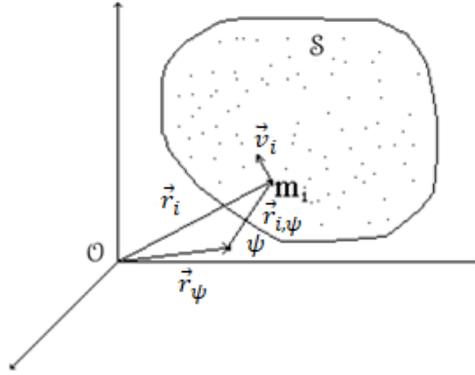


Figura 2.2: Relación entre el polo ψ y el origen \mathcal{O} .

Axioma 2.2 (Segunda Ley de Newton) Denótese con \vec{f}_i la fuerza ejercida sobre la partícula $i \in \mathcal{S}$ y sea

$$\vec{f} := \sum_{i \in \mathcal{S}} \vec{f}_i \quad (2.1)$$

$$\vec{f} = \dot{\vec{p}}$$

Axioma 2.3 (Tercera Ley de Newton) Dados $i, j \in \mathcal{S}$ denótese por \vec{f}_{ij} la fuerza ejercida sobre i por j . Entonces

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

$$\vec{f} = -\vec{f}_{int} + \vec{f}_{ext}$$

Lema 2.1 En un sistema de puntos materiales

$$\vec{f}_{int} = \vec{0}$$

por lo que a partir de la ecuación (2.1)

$$\vec{f}_{ext} = \dot{\vec{p}}$$

Definición 2.3 Considerando que la masa de un sistema \mathcal{S} de puntos materiales está dada por

$$m := \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i$$

el punto CI con vector de posición

$$\vec{r}_{CI} := \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \vec{r}_i \quad (2.1)$$

que recibe el nombre de centro inercial.

Observación 2.1 De la definición de centro de masa se obtiene inmediatamente la expresión de la velocidad de este punto respecto del origen \mathcal{O} : de la derivación de (2.1) resulta

$$\vec{v}_{CI} := \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \vec{v}_i$$

2.1.2. Propiedades del Centro Inercial

Lema 2.2 En un sistema de partículas \mathcal{S} el centro de masa \vec{r}_{CI} es tal que su dinámica está dado por

$$m \ddot{\vec{r}}_{CI} = \vec{f}_{ext}$$

donde m representa la masa total del cuerpo rígido \mathcal{S} y \vec{f}_{ext} la sumatoria de fuerzas externas aplicadas en el centro inercial de \mathcal{S} .

Teorema 2.1 (König) Supóngase dos sistemas de referencia, uno absoluto con origen \mathcal{O} y otro relativo con origen \mathcal{O}' (Fig.2.3). La energía cinética de un sistema de partículas \mathcal{S} se puede calcular como

$$E_c = E_{c_{\mathcal{O}'}} + E_{c_{rel,\mathcal{O}'}} + m \langle \vec{v}_{i,\mathcal{O}'}, \vec{v}_{CI,\mathcal{O}'} \rangle \quad (2.2)$$

donde:

$\vec{v}_{\mathcal{O}'}$ es la velocidad absoluta del origen \mathcal{O}' ,

$\vec{v}_{CI,\mathcal{O}'}$ es la velocidad del centro inercial relativa a \mathcal{O}' ,

$E_{c_{\mathcal{O}'}} := \frac{1}{2} m v_{\mathcal{O}'}^2$ es la energía cinética de \mathcal{S} en el sistema \mathcal{O}' ,

$E_{c_{rel,\mathcal{O}'}} := \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i v_{i,\mathcal{O}'}^2$ es la energía cinética de \mathcal{S} relativa a \mathcal{O}' ,

$\vec{v}_{i,\mathcal{O}'}$ denota la velocidad del punto $i \in \mathcal{S}$ relativa a \mathcal{O}' .

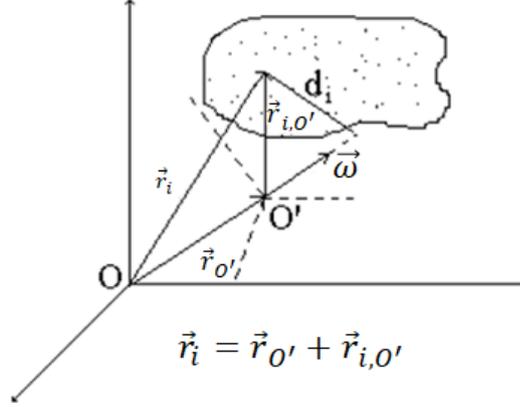


Figura 2.3: Relación entre el sistema absoluto y el auxiliar.

Prueba 2.1 De la definición de energía cinética, se tiene que

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} m_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle \quad (2.3)$$

y, además considerando que

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_{CI,O'}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \sum_{i \in S} m_i (\langle \vec{v}_{O'}, \vec{v}_{O'} \rangle + \langle \vec{v}_{i,O'}, \vec{v}_{i,O'} \rangle + 2 \langle \vec{v}_{O'}, \vec{v}_{i,O'} \rangle) \\ &= \frac{1}{2} m v_{O'}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \in S} m_i v_{i,O'}^2 + \langle \mathbf{v}_{O'}, \sum_{i \in S} m_i \vec{v}_{i,O'} \rangle \end{aligned}$$

Finalmente multiplicando y dividiendo por m

$$E_c = E_{c_{O'}} + E_{c_{rel,O'}} + m \langle \vec{v}_{i,O'}, \vec{v}_{CI,O'} \rangle$$

Colorario 2.1 El teorema de König tiene dos particularidades importantes.

1. Si el origen O' coincide con el centro de inercia del sistema, entonces $\vec{v}_{CI,O'}$, y

$$E_c = E_{c_{O'}} + E_{c_{rel,O'}}$$

2. MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS

2. Si \mathcal{S} es un cuerpo rígido cuyo pivote coincide con \mathcal{O}' , entonces existe el vector ω relativo a \mathcal{O}' tal que,

$$E_{c_{rel,\mathcal{O}'}} = \frac{1}{2} I_{\vec{\omega}} \omega^2$$

donde $I_{\vec{\omega}} := \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i d_i^2$ se la llama momento de inercia con respecto al eje de $\vec{\omega}$ y d_i es la distancia a dicho eje.

Definición 2.4 En términos generales, sean \mathcal{S} un sistema de puntos y $\psi\psi'$ un eje, la cantidad

$$I_{\psi\psi'} := \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i d_i^2$$

donde d_i denota la distancia de $i \in \mathcal{S}$ a $\psi\psi'$, se llama momento de inercia de \mathcal{S} con respecto del eje $\psi\psi'$ (Fig.2.4).

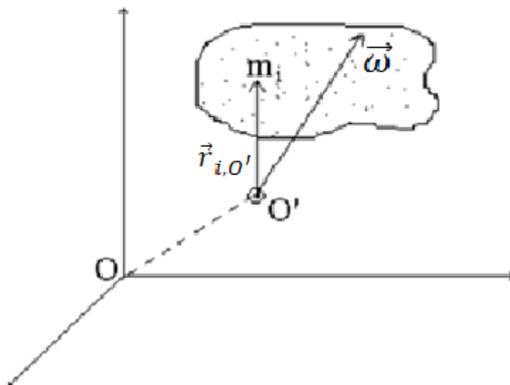


Figura 2.4: Cuerpo plano rotando en su plano respecto del pivote \mathcal{O} .

2.1.3. Teorema de Steiner

Teorema 2.2 (Steiner) Considérese el sólido de masa M de la Fig. 2.5. Désígnese por $I_{\psi\psi'}$ y por $I_{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$ los momentos de inercia respecto de los ejes $\psi\psi'$, que no pasa por el centro de masa, y $\mathcal{O}\mathcal{O}'$ que sí lo hace, es paralelo a $\psi\psi'$ y se halla separado de éste una distancia d . Entre tales momentos de inercia existe la relación

$$I_{\psi\psi'} = I_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} + md^2 \quad (2.4)$$

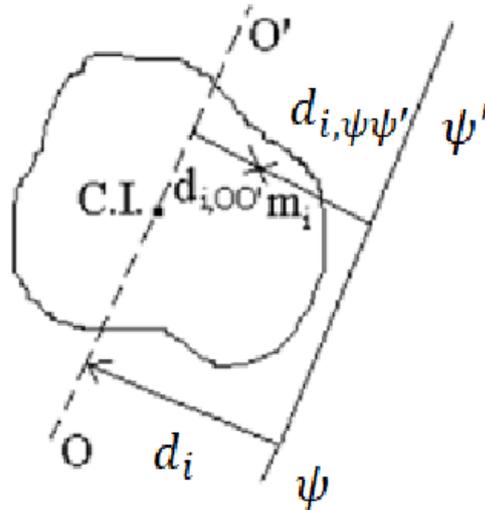


Figura 2.5: Sólido rotando alrededor de un eje que no pasa por su centro inercial.

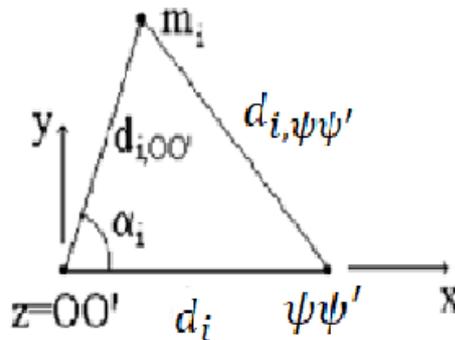


Figura 2.6: Diagrama de distancias a los ejes OO' y $\psi\psi'$ de un punto $i \in \mathcal{S}$.

2.1.4. Sistemas no inerciales

Definición 2.5 Un sistema coordinado que no experimenta aceleración se llama *sistema inercial*, en otro caso se denomina *sistema no inercial*.

2.1.4.1. Segunda Ley de Newton con respecto de un sistema relativo

Se sabe que la aceleración de un punto de posición \vec{r}_{abs} respecto de un sistema coordinado absoluto puede ser descrita en términos de la aceleración $\vec{w}_\mathcal{O}$ y la velocidad y aceleración angular $\vec{\omega}$ y $\vec{\epsilon}$ de un sistema coordinado relativo con origen \mathcal{O} , a saber

$$\vec{w}_{abs} = \vec{w}_{tr} + \vec{w}_{rel} + \vec{w}_{cor}$$

donde las aceleraciones de traslación y Coriolis están definidas como

$$\vec{w}_{tr} := \vec{w}_\mathcal{O} + [\vec{\epsilon}, \vec{r}_{rel}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{rel}]]$$

$$\vec{w}_{cor} := 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{rel}]$$

mientras que \vec{r}_{rel} , \vec{v}_{rel} y \vec{w}_{rel} representan la posición, la velocidad y la aceleración relativas del punto, es decir, respecto del sistema relativo. Ahora bien, se sabe que el CI (Centro Inercial) de un sistema de puntos \mathcal{S} con masa total constante M cumple la relación

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}}_{CI,abs}$$

donde $\vec{r}_{CI,abs}$ denota la posición de CI. Si

$$\vec{w}_{CI,abs} := \ddot{\vec{r}}_{CI,abs} \tag{2.5}$$

la expresión (2.5) se puede presentar como

$$\dot{\vec{p}} = m\vec{w}_{CI,abs}$$

resultado que, en combinación con la Segunda Ley de Newton (2.1), lleva a

$$m\vec{w}_{CI,abs} = \vec{f}_{ext}$$

o bien,

$$m(\vec{w}_{CI,tr} + \vec{w}_{CI,rel} + \vec{w}_{CI,cor}) = \vec{f}_{ext} \tag{2.6}$$

de donde se llega a

$$m\vec{w}_{CI,tr} = \vec{f}_{ext} - m\vec{w}_{CI,rel} + m\vec{w}_{CI,cor} \tag{2.7}$$

Definición 2.6 Las cantidades

$$\vec{f}_{CI,tr} := -m\vec{w}_{CI,tr} \tag{2.8}$$

se llama *fuerza de traslación inercial*,

$$\vec{f}_{CI,cor} := -m\vec{\omega}_{CI,cor} \quad (2.9)$$

se llama *fuerza de coriolis inercial*.

Las ecuaciones (2.8) y (2.9) permiten obtener una expresión relativa a la ley (2.1) que describe la dinámica del centro inercial respecto a un sistema de referencia relativo o acelerado.

$$m\vec{\omega}_{CI,rel} = \vec{f}_{ext} + \vec{f}_{CI,tr} + \vec{f}_{CI,cor}$$

2.2. Ecuaciones dinámicas de Lagrange

La Segunda Ley de Newton y las ecuaciones dinámicas de Euler son el formalismo que permite obtener las ecuaciones de movimiento en sistemas mecánicos, sin embargo generalmente su aplicación se complica si la geometría del movimiento no es simple y/o por la presencia de restricciones a éste. Las ecuaciones de Lagrange resultan una herramienta imprescindible pues incluyen de manera natural las restricciones cinemáticas, además de que se basan en el concepto de coordenadas generalizadas, las cuales permiten describir la dinámica en términos de las variables asociadas con los grados de libertad del sistema. Parte fundamental de las ecuaciones de Lagrange son las fuerzas generalizadas, éstas se definen y caracterizan las fuerzas que afectan la dinámica de un sistema. En general, los distintos puntos materiales de los sistemas mecánicos guardan conexiones entre sí, llamadas conexiones o restricciones mecánicas. Éstas son relaciones que condicionan el movimiento y se describen por expresiones matemáticas[3].

Un sistema mecánico simple es un sistema cuyo Langrangiano se encuentra en la forma de la diferencia entre su energía cinética (semidefinida positiva) y su energía potencial [19], como

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_c - E_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - E_p(\mathbf{q}) \quad (2.10)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ denota la configuración del vector de coordenadas generalizadas, $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia del sistema. E_c es la energía cinética y $E_p(\mathbf{q})$ es la energía potencial del sistema debido a la fuerza de gravedad y/o fuerzas con resortes.

Lema 2.2 (Lagrange) Sea S un sistema holonómico de N puntos materiales cuyas masas no dependen de la velocidad \dot{q} ni de la posición q . En un sistema tal la dinámica queda gobernada por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

donde \mathcal{L} es el Lagrangiano de \mathcal{S} , τ_i recibe el nombre de fuerza generalizada correspondiente a la coordenada q_i , y E_p es la energía potencial de cada elemento mecánico,

$$E_p = \sum_{i=1}^n E_{p_{mi}} \quad (2.12)$$

El uso de las ecuaciones de Lagrange para el modelado dinámico de un sistema mecánico simple, se reduce a cuatro etapas [11]:

1. Cálculo de la energía cinética (2.2).
2. Cálculo de la energía potencial.(2.12)
3. Cálculo del Lagrangiano (2.10)
4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange (2.11).

Las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico actuado o subactuado suele tomar la siguiente forma vectorial, una vez desarrolladas las ecuaciones de Lagrange

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = U \quad (2.13)$$

El término $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ contiene dos tipos de términos, uno llamado centrífugos y otro Coriolis. Además, $G(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ contiene los términos gravitacionales, y $U \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector que contiene las fuerzas generalizadas de entrada para el sistema mecánico.

2.3. Sistemas Mecánicos Tipo Péndulo

A continuación se presentan una serie de mecanismos cuya principal característica es su configuración tipo péndulo. Todos estos ejemplos se eligieron debido a la complejidad del diseño de leyes de control, y al hecho de que su respuesta física resulta de gran interés en la investigación de tareas con control y robótica [26, 2, 5, 4, 24].

Los siguientes sistemas son considerados sistemas subactuados, en otras palabras, sistemas mecánicos donde hay ausencia de actuadores en alguna de las articulaciones del mecanismo. También, son definidos como mecanismo que poseen menor cantidad de entradas de control (actuadores) que grados de libertad, esto puede ser debido a fallas técnicas, o para reducir el costo de diseño.

2.3.1. Péndulo-Carro

El sistema Péndulo-Carro (ver Fig.2.7) esta representado en la Fig.2.7 [34],

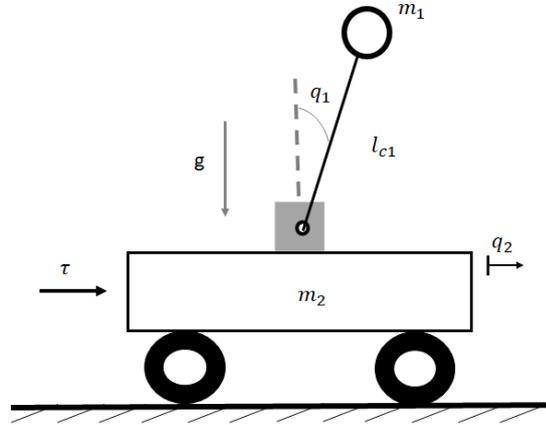


Figura 2.7: sistema Péndulo-Carro

Se definen los parámetros del sistema como:

- m_1 : Masa del péndulo [Kg].
- m_2 : Masa del carro [Kg].
- l_{c1} : Distancia del pivote al centro de masa del péndulo [m].
- g : Aceleración debido a la gravedad [m/s²].
- q_2 : Distancia del centro de masa del carro desde su posición inicial [m].
- q_1 : Ángulo del péndulo respecto a la vertical [rad].
- τ : Fuerza aplicada al carro [N].

Ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{q}_2 - m_1 l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1^2 + m_1 l_{c1} \cos(q_1) \ddot{q}_1 &= \tau \\ m_1 \ddot{q}_2 \cos(q_1) + m_1 l_{c1}^2 \ddot{q}_1 - m_1 g \sin(q_1) &= 0 \end{aligned}$$

2.3.2. Doble péndulo

El doble péndulo (ver Fig.2.8) un mecanismo planar de dos grados de libertad formado de la unión de dos eslabones como se puede observar en la figura 2.2, la unión entre los eslabones es de tipo revoluta por lo que pueden girar libremente alrededor de sus ejes de rotación[22, 36].

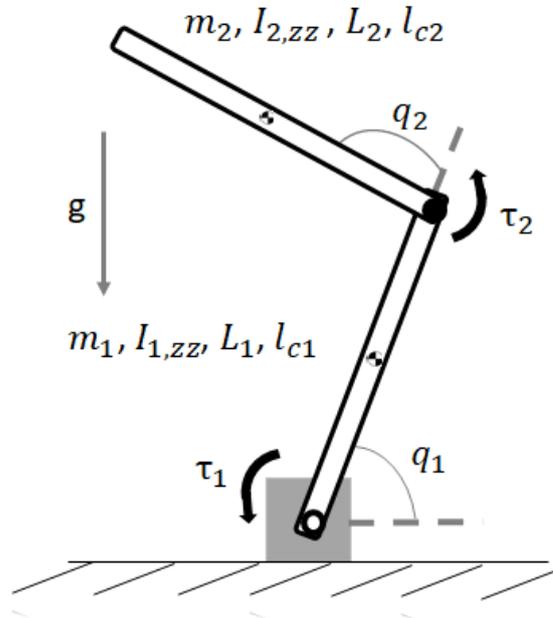


Figura 2.8: Péndulo doble.

Los parámetros del doble péndulo son:

- L_1 : Longitud del eslabón 1 [m].
- L_2 : Longitud del eslabón 2 [m].
- $I_{1,zz}$: Momento de inercia del eslabón 1 [Kg*m2].
- $I_{2,zz}$: Momento de inercia del eslabón 2 [Kg*m2].
- m_1 : Masa del eslabón 1 [Kg].
- m_2 : Masa del eslabón 2 [Kg].
- l_{c1} : Distancia del centro de masa del eslabón 1 [m].
- l_{c2} : Distancia del centro de masa del eslabón 2 [m].
- g : Fuerza de gravedad [m/s2].
- τ_1 : Torsión aplicada al eslabón 1 [Nm].
- τ_2 : Torsión aplicada al eslabón 2 [Nm].
- q_1 : Desplazamiento angular del eslabón 1 [rad].

- q_2 : Desplazamiento angular del eslabón 2 respecto al eslabón 1 [rad].

Ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 - \phi\dot{q}_2^2 - 2\phi\dot{q}_1\dot{q}_2 + (h_1 + h_2)g &= \tau_1 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \phi\dot{q}_1^2 + h_2g &= \tau_2 \end{aligned}$$

cuyos coeficientes son

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_2L_1^2 + \frac{1}{3}m_1L_1^2 + \frac{1}{3}m_2L_2^2 + 2m_2L_1l_{c2} \cos(q_2) \\ m_{12} = m_{21} &= \frac{1}{3}m_2L_2^2 + m_2L_1l_{c2} \cos(q_2) \\ m_{22} &= \frac{1}{3}m_2L_2^2 \\ \phi &= m_2L_1l_{c2} \sin \theta_2 \\ h_1 &= (m_1l_{c1} + m_2L_1) \cos \theta_1 \\ h_2 &= m_2l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Este mecanismo tiene dos configuraciones particulares, cuando $\tau_1 = 0$ se le conoce como Acrobot, y cuando $\tau_2 = 0$ se le conoce como Pendubot.

2.3.3. Péndulo doble sobre un carro

El Péndulo doble sobre un carro (ver Fig.2.9) es una extensión del péndulo doble al agregarse una masa extra (carro) cuyo desplazamiento es prismático y cuya entrada de control es dicha masa o carro[27].

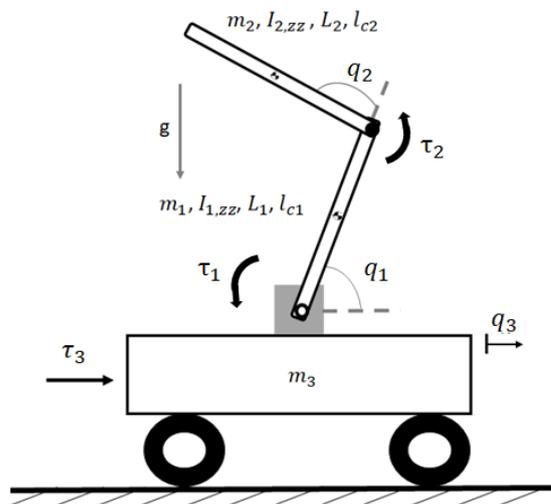


Figura 2.9: Péndulo doble sobre un carro.

Parámetros del doble péndulo sobre un carro:

- L_1 : Longitud del eslabón 1 [m].
- L_2 : Longitud del eslabón 2 [m].
- $I_{1,zz}$: Momento de inercia del eslabón 1 [Kg*m2].
- $I_{2,zz}$: Momento de inercia del eslabón 2 [Kg*m2].
- m_1 : Masa del eslabón 1 [Kg].
- m_2 : Masa del eslabón 2 [Kg].
- m_3 : Masa del carro [Kg].
- l_{c1} : Distancia del centro de masa del eslabón 1 [m].
- l_{c2} : Distancia del centro de masa del eslabón 2 [m].
- g : Fuerza de gravedad [m/s2].
- τ_1 : Torsi3n aplicada al eslabón 1 [Nm].
- τ_2 : Torsi3n aplicada al eslabón 2 [Nm].
- τ_3 : Fuerza aplicada al carro [N].
- q_1 : Desplazamiento angular del eslabón 1 [rad].
- q_2 : Desplazamiento angular del eslabón 2 respecto al eslabón 1 [rad].

- q_3 : Desplazamiento horizontal del eslabón 2 respecto al eslabón 1 [rad].

Ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
 m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 - m_{13}\ddot{q}_3 - \phi_1\dot{q}_2^2 - 2\phi_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + (h_1 + h_2)g &= \tau_1 \\
 m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 - m_{23}\ddot{q}_3 + \phi_1\dot{q}_1^2 + h_2g &= \tau_2 \\
 -m_{31}\ddot{q}_1 - m_{32}\ddot{q}_2 + m_{33}\ddot{q}_3 - (h_1 + h_2)\dot{q}_1^2 - h_2\dot{q}_2^2 - 2h_2\dot{q}_1\dot{q}_2 &= \tau_3
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$m_{11} = m_2L_1^2 + m_1l_{c1}^2 + m_2l_{c2}^2 + I_{1,zz} + I_{2,zz} + 2m_2L_1l_{c2}\cos(q_2),$$

$$m_{12} = m_{21} = m_2l_{c2}^2 + I_{2,zz} + m_2L_1l_{c2}\cos(q_2),$$

$$m_{13} = m_{31} = (m_1l_{c1} + m_2L_1)\sin(q_1) + m_2l_{c2}\sin(q_1 + q_2),$$

$$m_{22} = m_2l_{c2}^2 + I_{2,zz},$$

$$m_{23} = m_{32} = m_2l_{c2}\sin(q_1 + q_2),$$

$$m_{33} = m_3 + m_1 + m_2,$$

$$\phi_1 = m_2L_1l_{c2}\sin\theta_2,$$

$$h_1 = (m_1l_{c1} + m_2L_1)\cos\theta_1,$$

$$h_2 = m_2l_{c2}\cos(\theta_1 + \theta_2).$$

conclusión

En este capítulo se estudiaron los fundamentos físicos de los sistemas mecánicos, que incluyen las leyes de Newton y las propiedades de el centro de inercia de un sistema de puntos materiales o cuerpo rígido en movimiento. También, se introdujeron conceptos importantes para el desarrollo de las ecuaciones de energía de los sistemas mecánicos, estos son, El teorema de König para la energía cinética de un sistema, y el teorema de Steiner para cuerpos rígidos cuyo eje de rotación se encuentra alejado de su centro inercial. A su vez, se definió el concepto de sistema físico no inercial, y su diferencia con respecto de un sistema inercial fijo. Además, se expuso la metodología de las ecuaciones de Lagrange, a través de la cual se pueden obtener las ecuaciones dinámicas de los sistemas mecánicos. Finalmente, se expusieron algunos ejemplos de sistemas mecánicos tipo péndulo estudiados en el desarrollo de sistemas de control y sistemas robóticos.

Control por Modos Deslizantes

Cuando se pretende abordar un problema de control para cualquier sistema dinámico, siempre es imperativo tomar en cuenta las discrepancias que presenta una aproximación o modelo matemático que describe el comportamiento de un sistema físico. Estas discrepancias, pueden generarse por parámetros no modelados del sistema real, por perturbaciones externas desconocidas, o por alguna dinámica parasitaria o que no quedó modelada en su ecuación dinámica. Por este motivo, diseñar una ley de control apropiada suele ser un problema complejo. En este sentido, una de las áreas de control que ofrecen solución para el diseño de controladores para sistemas de control en lazo cerrado, es el control robusto. Este enfoque de diseño lidia directamente con incertidumbres o perturbaciones presentes en los sistemas de control, logrando generalmente, la estabilidad de dichos sistemas en presencia de incertidumbres o perturbaciones acotadas. Un enfoque particular de control robusto, es el Control por Modos deslizantes o Sliding Modes Control. En este capítulo se presentan los fundamentos CMD, y se presenta también el desarrollo de leyes de control por MD y ST.

3.1. Antecedentes

El desarrollo de los controladores por Modos Deslizantes se remonta a los años 60 en la Unión Soviética, con la aparición del concepto matemático de los "Sistemas de Estructura Variable", o VSS por sus siglas en inglés. Pronto, el CMD se volvió el modo principal de operación para este tipo de sistemas VSS [31]. Por lo anterior, las herramientas matemáticas desarrolladas para estudiar los sistemas basados en MD fueron inicialmente orientadas al análisis del comportamiento de sistemas de control discontinuo. En ese momento, se le dio especial atención a las numerosas capacidades que proporciona este tipo de dinámica discontinua, tales son, linealización de sistemas, reducción de orden de ecuaciones diferenciales, diseño de controladores con alta exactitud, y propiedades de estabilización. En consecuencia, junto con los ya muy conocidos controladores lineales, los controladores por MD se implementaron en gran medida en sistemas de control para generadores de corriente continua, o sistemas discontinuos de

3. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

alta frecuencia como conmutadores o transistores [32]. Por lo tanto, debido a su propiedad de reducción de orden, baja sensibilidad a perturbaciones, y variaciones en el modelo de la planta, los controladores basados en MD se han convertido en una excelente herramienta para controlar sistemas con una dinámica no lineal de alto orden bajo condiciones de incertidumbre o perturbación acotadas presentes en procesos y mecanismos modernos [29].

3.2. Fundamentos de Modos Deslizantes

El fenómeno de los modos deslizantes aparecen en los sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias con parte derecha discontinua. El ejemplo típico de un sistema con modos deslizantes, es un sistema de relé de segundo orden. La entrada de control se describe como [31],

$$\begin{aligned} \ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y &= u \\ u &= -K * \text{sign}(s), \quad s = cx + \dot{y}, \quad a_1, a_2, K, c \in \mathbb{R} \quad \text{son constantes.} \end{aligned}$$

K tomará solo dos valores. K o $-K$, y experimenta discontinuidades en la superficie $s = 0$ en el plano de estados (y, \dot{y}) (ver 3.2). Se desprende del análisis del plano de estados que, en la vecindad del segmento l' en la superficie de deslizamiento $s = 0$, las trayectorias van en dirección opuesta, lo cual lleva a la aparición de los modos deslizantes a lo largo de esta superficie. La ecuación de dicha superficie es

$$\dot{y} + cy = 0$$

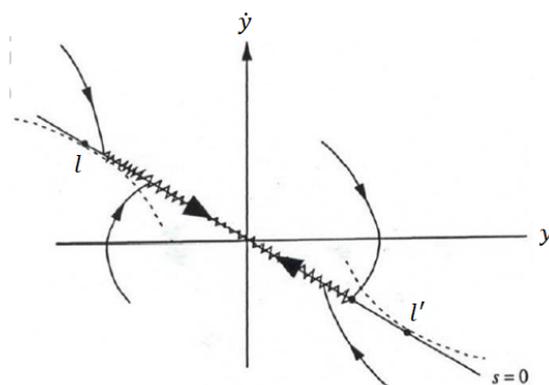


Figura 3.1: Modos Deslizantes en un sistema tipo relé.

Se puede interpretar que

- El orden de la ecuación s es menor que la del sistema original.

- Los modos deslizantes no dependen de la dinámica de la planta, y solo está determinada por el parámetro c .

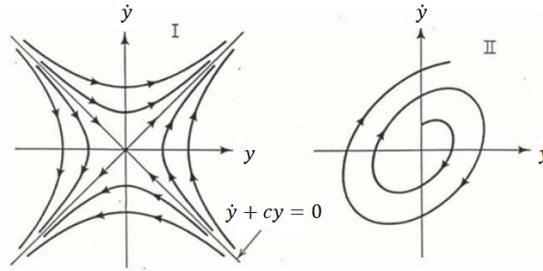


Figura 3.2: Plano de estados (y, \dot{y}) de dos sistemas inestables.

Los modos deslizantes se volvieron el principio de operación de las llamadas VSS, una VSS consiste en un conjunto de subsistemas continuos con una lógica de deslizamiento propia, como consecuencia, las acciones de control son funciones de estados discontinuas, perturbaciones, y entradas de referencia. El sistema tipo relé con estados dependientes de la amplitud de la variable de control ilustra este tipo de sistemas VSS.

El sistema con $a_1 = 0$ y $a < 0$ consta de dos estructuras lineales inestables ($u = kx$ y $u = -kx$, Fig.3.1) con $y = 0$ y $s = 0$ como líneas de conmutación. Como está claro desde el plano de estado del sistema, el estado alcanza la línea de conmutación en $s = 0$ para cualquier condición inicial. Entonces, el modo deslizante ocurre en esta línea (Fig.3.3) con la ecuación de movimiento $\dot{y} + cy = 0$, mientras que el vector de estado decae exponencialmente. De forma similar al sistema de relé, después del inicio del modo deslizante, el movimiento se rige por una ecuación de orden reducida que no depende de los parámetros de la planta.

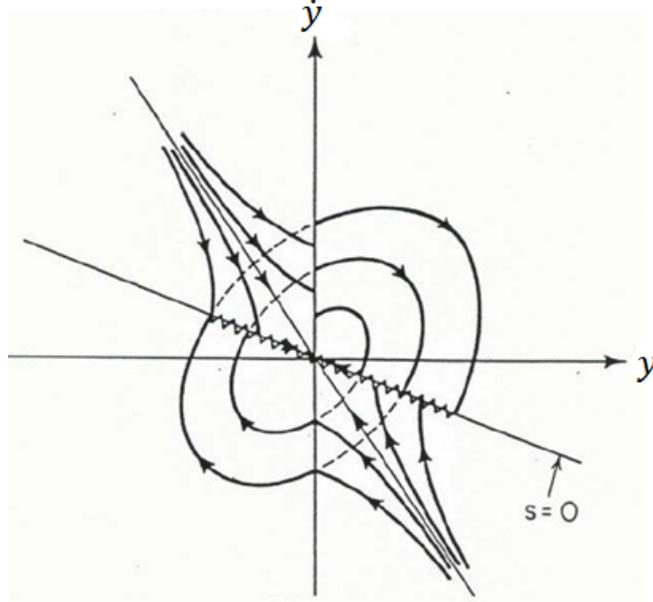


Figura 3.3: Plano de estados de un VSS.

Considerese el sistema no lineal afín con modos deslizantes,

$$\dot{y}_s = f(t, y_s) + B(y_s, t)u, \quad (3.1)$$

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(t, y_s) & \text{if } \sigma_i > 0 \\ u_i^-(t, y_s) & \text{if } \sigma_i < 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

donde $y \in \mathbb{R}^m$ es un vector de estado, $u \in \mathbf{R}^m$ es un vector de control, $u_i^+(t, y)$, $u_i^-(t, y)$ y $s_i(y)$ son funciones continuas de con argumentos, $u_i^+ \neq u_i^-$. El control es diseñado como una función discontinua del estado tal que cada componente se somete a discontinuidades en alguna superficie en el espacio de estado del sistema.

Por lo general en (3.1) los modos deslizantes existen en la intersección de todas las superficies discontinuas $s_i = 0$, o en el conjunto

$$s(y_s) = s^T[s_1, \dots, s_m], \quad \text{de dimensión } n-m.$$

En modo deslizante, la variable s es cercana a cero, mientras que la acción de control toma un valor finito u_{av} (un valor promedio, Fig. 3.4). Por tanto, el control implementa una ganancia teóricamente infinita, que es la herramienta usada para rechazar perturbaciones y otras incertidumbres del sistema. A diferencia del control continuo, los modos deslizantes presentan la propiedad de invarianza en tiempo finito. Además, dado que las trayectorias en modos deslizantes pertenecen a una superficie o conjunto

de superficies de menor orden que el sistema original, esto posibilita al diseñador simplificar y desacoplar la ley de control. Tanto la reducción de orden, como la invarianza son visibles por arriba de sistemas de segundo orden.

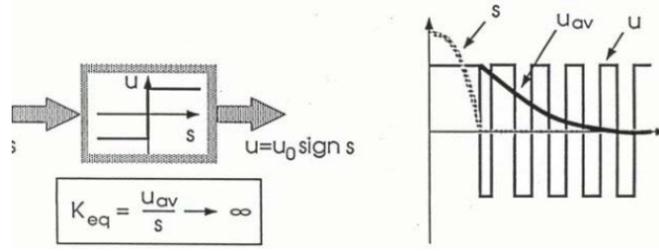


Figura 3.4: Implementación de alta ganancia en modos deslizantes.

3.2.1. Solución de Filippov

Considere inicialmente el caso cuando el sistema (3.1) tiene una sola entrada, y se define [23]

$$\mathbf{S} = y_s : s(y_s) = 0$$

y $s : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Supongamos que y_{s0} es un punto de discontinuidad en \mathbf{S} y define $f_-^c(y_{s0})$ y $f_+^c(y_{s0})$ como los límites de $f^c(y_s)$ cuando el punto y_{s0} es aproximado desde lados opuestos de la tangente de \mathbf{S} en y_{s0} . La solución propuesta por Filippov viene dada por

$$\dot{y}_s(t) = (1 - \alpha)f_-^c(y_s) + \alpha f_+^c(y_s) \quad (3.2)$$

donde $0 < \alpha < 1$.

El coeficiente α se escoje de tal manera que

$$f_a^c = (1 - \alpha)f_-^c + \alpha f_+^c \quad (3.3)$$

sea tangencial a \mathbb{S} (ver Fig.3.5).

Observación 3.1 De la discusión anterior, está claro que la solución Filippov es una solución promedio de los dos vectores de velocidad en el punto y_{s0} . La ecuación (3.2) se puede considerar como una ecuación diferencial cuyo lado derecho se define como el conjunto convexo

$$f_{flip}(y_s) = (1 - \alpha)f_-^c + \alpha f_+^c : \text{for all } \alpha \in [0, 1]$$

por lo tanto,

$$\dot{y}_s \in f_{flip}(y_s)$$

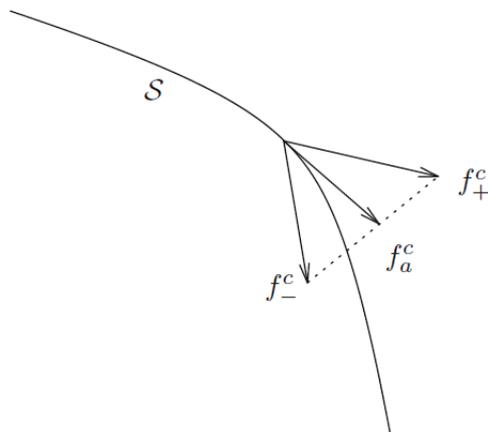


Figura 3.5: Modos Deslizantes por Flippov.

Los valores de α que aseguran $\dot{s}(t) = 0$ se pueden calcular explícitamente a partir de la ecuación (3.2). Por simplicidad, supongamos $s(t) = \mathbf{S}y$ donde $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^n$. Entonces explícitamente

$$\dot{s} = \mathbf{S}y = (1 - \alpha)\mathbf{S}f_-^c + \alpha\mathbf{S}f_+^c$$

y, para mantener $s = 0$, α debe satisfacer

$$(1 - \alpha)\mathbf{S}f_-^c + \alpha\mathbf{S}f_+^c = 0$$

por consiguiente

$$\alpha = \frac{\mathbf{S}f_-^c}{\mathbf{S}f_-^c - \mathbf{S}f_+^c}$$

por lo tanto

$$\dot{x} = \frac{\mathbf{S}f_-^c f_+^c - \mathbf{S}f_+^c f_-^c}{\mathbf{S}f_-^c - \mathbf{S}f_+^c}$$

En este sentido, dado que $u(y_s)$ introduce una discontinuidad (ver Fig.3.6)

$$u_i = \begin{cases} u_i^+ & \text{if } \sigma_i > 0 \\ u_i^- & \text{if } \sigma_i < 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

El problema de control consiste en desarrollar una ley que force los estados de un sistema a alcanzar la superficie \mathbf{S} , y que genere los modos deslizantes para hacer converger a $s(y_s)$ en un tiempo finito [28].

El diseño de la ley de control de modo deslizante se puede dividir en dos fases como se muestra en la Fig.3.7 :

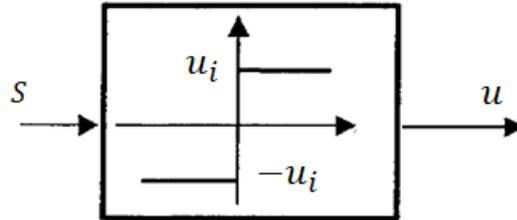


Figura 3.6: Función signo.

1. La Fase 1 (fase de alcance) consiste en la construcción de una superficie de deslizamiento adecuada para que la dinámica del sistema confinado a la superficie deslizante \mathbf{S} produzca un comportamiento deseado;
2. La Fase 2 (fase deslizante) implica el diseño de una ley de control discontinua que force la trayectoria del sistema a la superficie deslizante y la mantenga ahí.

$$u = u_i \text{sign}(s)$$

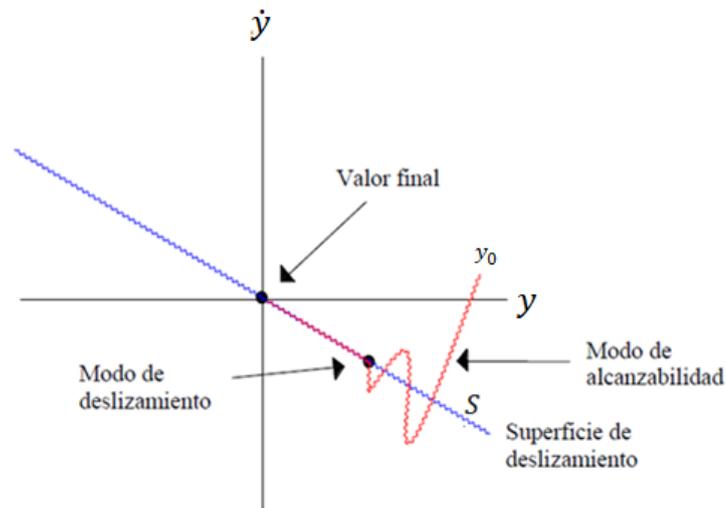


Figura 3.7: Modos deslizantes.

Para mantener el régimen de deslizamiento ideal, la señal de control debe ser capaz de conmutar con una frecuencia infinita entre valores positivos a negativos, esto produce un efecto indeseado como lo es el **chattering**, así que las trayectorias oscilaran oscilan alrededor de la superficie de deslizamiento (véase Fig. 3.7). La presencia del chattering puede excitar dinámicas no modeladas, reducir la exactitud del control, introducir grandes pérdidas por calor en circuitos eléctricos de potencia, aparte de producir fallas en

dispositivos mecánicos. Este efecto, sin embargo puede ser reducido aplicando técnicas de MD de segundo orden como el algoritmo ST.

3.2.2. Efecto chattering

Las aplicaciones de CMD pueden experimentar un fenómeno no deseado de oscilaciones con una frecuencia y amplitud finitas, las cuales son conocidas como chattering. El chattering es un efecto que aparece naturalmente en este tipo de controladores debido su comportamiento discontinuo, y puede ser peligroso porque provoca baja exactitud en los controladores, amplio juego en partes mecánicas, y grandes pérdidas de calor en circuitos de potencia. Existen dos razones que pueden producir el chattering [30]:

- El chattering puede ser causado por una dinámica rápida que fue omitida en el modelo ideal. Estas dinámicas sin modelar con pequeñas constantes de tiempo, generalmente no se tienen en cuenta en los modelos de servomecanismos, sensores y procesamiento de datos sors.
- La segunda razón, es la implementación de controladores digitales con muestreo finito, que causa oscilación por discretización. Teóricamente, un modo deslizante ideal implica una frecuencia de deslizamiento infinita. Dado que el control es constante dentro del intervalo de muestreo, la frecuencia de deslizamiento no puede exceder la frecuencia de muestreo.

3.3. Estabilidad de Lyapunov

La teoría de la estabilidad juega un papel central en ingeniería de control. Existen diferentes tipos de problemas de estabilidad que surgen en el estudio de sistemas dinámicos. La estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema suele caracterizarse en el sentido de Lyapunov. Un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones que comienzan en puntos cercanos se quedan cerca; de lo contrario, es inestable. Es asintóticamente estable si todas las soluciones que comienzan en puntos cercanos no solo permanecen cerca, pero también tienden al punto de equilibrio a medida que el tiempo se acerca al infinito. Los teoremas de estabilidad de Lyapunov dan condiciones suficientes para la estabilidad, estabilidad asintótica, etc. No dicen si las condiciones dadas también son necesarias. Además el análisis de estabilidad de Lyapunov puede mostrar las cotas de la solución de un sistema [12, 33].

Considere el siguiente sistema dinámico que satisface

$$\dot{z} = f(z, t) \quad z(t_0) = z_0 \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (3.4)$$

Supondremos que $f(z, t)$ satisface las condiciones estándar para la existencia y unicidad de soluciones. Tales condiciones son, por ejemplo, que $f(z, t)$ es Lipschitz continuo

con respecto a x , uniformemente en t , y por partes continuo en t . Un punto $z^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio de (3.4) si $f(z^*, t) := 0$. De manera intuitiva y un tanto cruda, decimos un que un punto de equilibrio es localmente estable si todas las soluciones que comienzan cerca de z^* (significado que las condiciones iniciales están en la vecindad de z^*) permanecen cerca de z^* para todo el tiempo t . Se dice que el punto de equilibrio z^* es localmente asintóticamente estable si z^* es localmente estable y, además, todas las soluciones comienzan cerca z^* y que tiendan hacia z^* cuando $t \rightarrow \infty$.

Cambiando el origen del sistema, podemos suponer que el equilibrio el punto de interés ocurre en $z^* = 0$.

Definición 3.2 (Estabilidad en el sentido de Lyapunov) El punto de equilibrio $z^* = 0$ en (3.4) es estable en $t = t_0$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$, tal que

$$\|z_{t_0}\| < \delta \mapsto \|z_t\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.5)$$

Definición 3.3 (Estabilidad asintótica) Un punto de equilibrio $x^* = 0$ para (3.4) es asintóticamente estable en $t = t_0$ si

1. $z^* = 0$ es estable, y
2. $z^* = 0$ es localmente atractivo, es decir, existe $\delta(t_0)$ tal que

$$\|z_{t_0}\| < \delta \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} \|z_t\| = 0. \quad (3.6)$$

Como en la definición anterior la estabilidad asintótica se define en t_0 , la estabilidad asintótica uniforme requiere:

1. $z^* = 0$ es uniformemente estable, y
2. $z^* = 0$ es uniformemente localmente atractiva; es decir, existe δ independiente de t_0 para lo cual se cumple la ecuación (3.4). Además, se requiere que la convergencia en la ecuación (3.4) sea uniforme.

3.3.1. Método directo de Lyapunov

El método directo de Lyapunov permite determinar la estabilidad de un sistema sin integrar explícitamente la ecuación diferencial (3.4). El método es una generalización de la idea de que si hay alguna "medida de energía" en un sistema, entonces podemos estudiar la tasa de cambio de la energía del sistema para determinar su estabilidad. Sea, B una bola de tamaño ε alrededor del origen, $B = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| < \varepsilon\}$.

Definición 3.4 (Función localmente definida positiva - fldp) Sea $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente definida positiva si $\varepsilon > 0$ y $\alpha_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad V(z, t) \geq \alpha_0(\|z\|) \quad \forall z \in B, \quad \forall t \geq 0$$

3. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

Definición 3.5 (Función definida positiva - fdp) Sea $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida positiva si satisface las condiciones de la **Definición 3.4** y, además $\alpha_0(h) \rightarrow \infty$ cuando $h \rightarrow \infty$).

Para acotar V por arriba, se define lo siguiente:

Definición 3.6 (Función decreciente) Sea $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente para alguna $\varepsilon > 0$ y para $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(z, t) \leq \alpha_0(\|z\|) \quad \forall z \in B, \quad \forall t \geq 0$$

Usando estas definiciones, el siguiente teorema nos permite determinar estabilidad para un sistema mediante el estudio de una función de energía apropiada. Este teorema establece que cuando $V(z, t)$ está definido como localmente positivo la función y $\dot{V}(z, t) \leq 0$, entonces se concluye que el punto de equilibrio z^* es estable. La derivada temporal de V se toma a lo largo de las trayectorias de el sistema:

$$\dot{V}|_{\dot{z}=f(z,t)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} f$$

Teorema 3.1 (Teorema básico de Lyapunov) Sea $V(z, t)$ una función no negativa con derivada \dot{V} a lo largo de las trayectorias del sistema,

1. Si $V(z, t)$ es localmente positiva definida y $\dot{V}(z, t) \leq 0$ localmente en z , y para todo t , entonces el origen del sistema es localmente estable (en el sentido de Lyapunov).
2. Si $V(z, t)$ es localmente positiva definida y decreciente, y $\dot{V}(z, t) \leq 0$ localmente en z , y para todo t , entonces el origen del sistema es uniforme localmente estable (en el sentido de Lyapunov).
3. Si $V(z, t)$ es localmente definido positivo y decreciente, y $-\dot{V}(z, t)$ es definida localmente positiva, entonces el origen del sistema es uniformemente localmente asintóticamente estable.
4. Si $V(z, t)$ es positivo definido y decreciente, y $-\dot{V}(z, t)$ es positivo definido, entonces el origen del sistema es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

Una función $V(z, t)$ que cumple con las condiciones impuestas en el método directo de Lyapunov, se denomina función de Lyapunov. Este método es una herramienta de análisis muy poderosa. Sin embargo, presenta dos desventajas. La primera es que no hay un método sistemático para hallar una función de Lyapunov por lo tanto hay que proponer una función candidata de Lyapunov y probar si la misma cumple con los requisitos de estabilidad. La segunda es que el teorema solo brinda condiciones suficientes por lo tanto el hecho de no encontrar una función candidata a Lyapunov que satisfaga las condiciones de estabilidad o de estabilidad asintótica no significa que el origen es inestable o asintóticamente estable.

3.4. Diseño de un controlador por Modos Deslizantes

Considerese el sistema con estados $y_{a1} = y_a$ y $y_{a2} = \dot{y}_{a1}$ [23],

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{a1} \\ \dot{y}_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{a2} \\ u + f(y_{a1}, y_{a2}, t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

el cual se requiere compensar através de una ley de control por Modos Deslizantes, para ello primero se propone una superficie de deslizamiento adecuada,

$$s = \sigma(y_{a1}, y_{a2}) = y_{a2} + cy_{a1}, \quad c > 0 \quad (3.8)$$

Para que los estados del sistema puedan alcanzar convergencia asintótica en cero en presencia de una perturbación acotada $f(y_{a1}, y_{a2}, t)$, se tiene que forzar s a cero en tiempo finito por medio de una acción de control u . Este problema se puede resolver aplicando la teoría de Lyapunov, para la dinámica de s a partir de las ecuaciones (3.7) y (3.8):

$$\dot{s} = cy_{a2} + f(y_{a1}, y_{a2}, t) + u, \quad s(0) = s_0 \quad (3.9)$$

Para (3.9) se propone la siguiente función de Lyapunov,

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (3.10)$$

Para asegurar la estabilidad asintótica se deben cumplir que

- (a) $\dot{V} < 0$ for $s \neq 0$
- (b) $\lim_{|s| \rightarrow \infty} V = \infty$

La condición (b) es satisfecha por (3.10). Para que la variable deslizante (8) alcance la convergencia en tiempo finito, la condición (a) se transforma en:

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2}, \alpha > 0 \quad (3.11)$$

Si (3.11) es integrada sobre $0 \leq t_r \leq t$, se obtiene

$$V^{1/2}(t) \leq -\frac{1}{2}\alpha t + V^{1/2}(0)$$

Si $V(t)$ alcanza la estabilidad en tiempo finito entonces t_r está acotada por

$$t_r \leq \frac{2V^{1/2}(0)}{\alpha}$$

La derivada de V , se calcula como

$$V = s\dot{s} = s(cy_{a2} + f(y_{a1}, y_{a2}, t) + u)$$

proponiendo $u = -cy_{a2} + v$, se obtiene la condición

$$\dot{V} = sf(y_{a1}, y_{a2}, t) + vs$$

donde $v = -\rho \text{sign}(s)$, y

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s > 0 \\ [-1, 1] & \text{if } s = 0 \\ -1 & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

Entonces se tiene

$$\dot{V} \leq |s|L - |s|K = -|s|(K - L)$$

$$\dot{V} \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |s|, \alpha > 0$$

$$\dot{V} \leq -|s|(K - L) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |s|$$

$$K = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + L$$

Por lo tanto, la ley de control que estabiliza el sistema en tiempo finito es

$$u = -cy_{a2} - \rho \text{sign}(s)$$

3.5. SúperTorsión

3.5.1. Fundamentos del algoritmo de SúperTorsión

Este algoritmo ha sido desarrollado para controlar sistemas con grado relativo uno para evitar el chattering en sistemas VSS. También en este caso las trayectorias en la superficie de deslizamiento (de orden 2) se caracterizan por "torcerse" alrededor del origen (Fig.3.8), pero la ley de control continuo $u(t)$ está constituida por dos términos. El primero se define por medio de su derivada discontinua en el tiempo, mientras que el otro es un función continua de la variable de deslizamiento propuesta s [15].

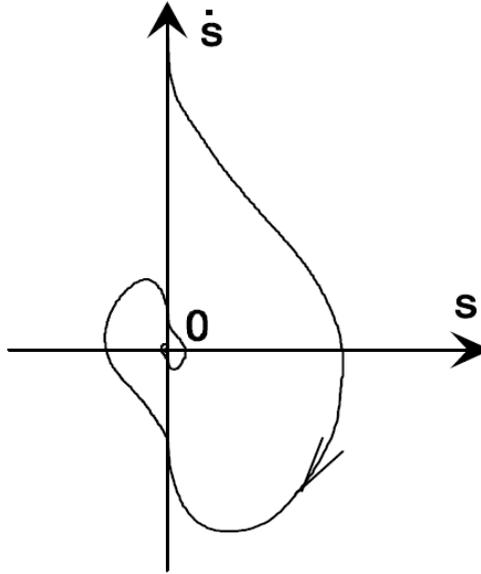


Figura 3.8: Fase de trayectorias-SuperTorsión.

Considerese el sistema,

$$\begin{cases} \dot{y}_{b1} = & y_{b2} \\ \dot{y}_{b2} = & \varphi(t, y_b) + \gamma(t, y_b)\dot{u} \end{cases} \quad (3.12)$$

donde φ y γ son funciones desconocidas acotadas [14],

$$\Phi > 0, |\varphi| \leq \Phi, 0 < \Gamma_m \leq \gamma \leq \Gamma_M$$

La ley de control está definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) &= \begin{cases} -u & \text{if } |u| > 1 \\ -W \text{sign}(y_{b1}) & \text{if } |u| \leq 1 \end{cases} \\ u_2(t) &= \begin{cases} -\lambda |s_0|^\rho \text{sign}(y_1) & \text{if } |y_1| > s_0 \\ -\lambda |y_{b1}|^\rho \text{sign}(y_{b1}) & \text{if } |y_{b1}| \leq s_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde \mathbf{S}_0 es la condición inicial de la variable de deslizamiento, y,

$$\begin{aligned} W &> \frac{\Phi}{\Gamma_m} \\ \lambda^2 &\geq \frac{4\Phi\Gamma_M(W + \Phi)}{\Gamma_m^2\Gamma_m(W - \Phi)} \\ 0 &< \rho \leq 0.5 \end{aligned}$$

El controlador puede ser simplificado cuando el sistema (3.12) es linealmente dependiente del control, u no requiere estar acotado y $s_0 = \infty$:

$$\begin{aligned} u &= -\lambda|s|^\rho \text{sign}(y_{b1}) + u_1, \\ u_1 &= -W \text{sign}(y_{b1}). \end{aligned}$$

El algoritmo de ST no necesita información sobre la derivada con respecto del tiempo de la variable deslizante. Un modo deslizante de orden 2 exponencialmente estable llega si la ley de control (3.15) con $\rho = 1$. La elección $\rho = 0.5$ asegura que el máximo posible para la realización de un modo deslizante de orden 2 se logre.

3.5.2. Diseño de controlador por SúperTorsión

El método clásico de Modos Deslizantes (primer orden) brinda una solución robusta y de alta precisión para una amplia gama de problemas de control en condiciones de incertidumbre. Sin embargo, presenta dos principales restricciones. En primer lugar, en problema de mantener los estados de un sistema en cero debe lograrse con una variable de deslizamiento de grado relativo 1, lo que significa que el control necesita aparecer explícitamente en la primera derivada de la variable. Por lo tanto, uno tiene que buscar variable de deslizamiento apropiada. En segundo lugar, la conmutación de control de alta frecuencia puede fácilmente causar complicaciones prácticas inaceptables (chattering). Una posible solución a estos problemas es aplicar un algoritmo de control de Modos deslizantes de segundo orden, como el Super-Twisting [16, 23].

Considerese nuevamente el sistema (3.4), pero ahora con $y_d = x_1$, se tiene entonces que

$$y_d^{(2)} = u + f(y_c, \dot{y}_c, t) \quad (3.13)$$

con una superficie de deslizamiento

$$s = \dot{e} + ce, \quad c > 0 \quad (3.14)$$

donde $e = y_c(t) - y_d(t)$, y

$$\dot{s} = \ddot{y}_c + c\dot{y}_c - f(y_d, \dot{y}_d, t) - c\dot{y}_d - u = \varphi(y_d, \dot{y}_d, t) - u \quad (3.15)$$

Para llevar a la variable (3.14) a cero en tiempo finito se intenta usar la siguiente ley de coontrol

$$u = c|s|^{1/2} \text{sign}(s) \quad (3.16)$$

suponiendo que $\varphi(y_d, \dot{y}_d, t) = 0$, la dinámica compensada (3.15) se vuelve,

$$\dot{s} = c|\sigma|^{1/2} \text{sign}(s) \quad (3.17)$$

cuyo tiempo de alcance es

$$t_r = \frac{2}{a}|s_0|^{1/2}$$

Por lo que el controlador (3.16) estabiliza la variable de deslizamiento en tiempo finito. Sin embargo cuando $\varphi(y_d, \dot{y}_d, t) \neq 0$, esto no ocurre. Por este motivo, el algoritmo de ST incluye una nueva variable de compensación para $\varphi(y_d, \dot{y}_d, t) \neq 0$ y $\dot{\varphi}(y_d, \dot{y}_d, t) \leq L$ donde $L > 0$ es la cota de la perturbación. Entonces,

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\bar{m}}(a|s|^{1/2} \text{sign}(s) + w \\ \dot{w} = b \text{sign}(s), \quad b > 0 \end{cases}$$

$$\dot{s} = \varphi(y_d, \dot{y}_d, t) + a|s|^{1/2} \text{sign}(s) + w$$

De esta manera el controlador (3.16) consigue igualar w $\varphi(y_d, \dot{y}_d, t)$ en tiempo finito por lo que s converge a cero.

Propiedades del algoritmo de SúperTorsión:

1. El controlador ST es una técnica de control basada en Modos Deslizantes de segundo orden, dado que tanto \dot{s} como s convergen a cero en tiempo finito.
2. Es un método de control continuo dado que $a|s|^{1/2} \text{sign}(s)$ y $w = b \int \text{sign}(s) dt$ son continuos.

Conclusión

En este capítulo se trataron los conceptos fundamentales para entender el funcionamiento de sistemas de control basados en MD. Se abordó la naturaleza deslizante de estos sistemas desde el sentido de Flippov, y sus fases de funcionamiento. También, se introdujo el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov, y sus respectivas

3. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

condiciones para diferentes tipos de estabilidad. Además, se presentó el concepto de algoritmo de ST, y se mostraron los pasos para la elaboración de leyes de control para MD y ST.

Capítulo 4

Formulación del problema

El sistema Pendulo tipo Acrobot sobre un carro es un mecanismo planar con dos eslabones rígidos unidos entre sí a través de juntas de revoluta y montados en una plataforma móvil rígida no accionada. Solo hay un actuador que proporciona la entrada de par en la segunda articulación del péndulo, ya que es una configuración de acrobot. Dicho sistema se toma desde un marco de referencia acelerado correspondiente al carro al que se encuentra fijo el acrobot. En este capítulo se propone el modelado de un sistema tipo péndulo en un sistema de referencia no inercial, mediante el teorema de König y las bien conocidas ecuaciones de Lagrange. Además, se desarrollan dos leyes de control para estabilización de posición (postura invertida) del robot, por medio de Modos Deslizantes y SúperTorsión. Por último, se estudia la estabilidad de ambos controladores.

4.1. Sistema Acrobot sobre un carro con marco de referencia mecánico no inercial

4.1.1. Modelo dinámico: ecuaciones de energía y ecuaciones de Lagrange.

Para desarrollar el modelo matemático del Acrobot sobre un carro, se tendrán en cuenta los siguientes supuestos: todos los elementos sólidos son rígidos, el sistema no tiene fricción y el efecto de la gravedad es vertical con respecto al plano de movimiento. El sistema tiene tres grados de libertad (uno traslacional y dos rotacionales), sin embargo el desplazamiento traslacional se considera como parte de los efectos no inerciales del sistema; el carrito y el robot Acrobot están limitados, debido a sus juntas mecánicas, a moverse solo horizontalmente; y en el caso de los eslabones del Acrobot, a girar sobre sus respectivos ejes. Sin embargo, los desplazamientos angulares y traslacionales del acrobot no están restringidos, es decir, ni los radios de giro ni la distancia

4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

de desplazamiento están limitados; el carro no tiene motor, pero cualquier aceleración inducida a través del carro transmitirá fuerzas de reacción (efecto no inercial) en la dinámica del Acrobot. El modelo toma en consideración solo las masas y los momentos de inercia del Acrobot, y omite la dinámica del carrito ya que el interés de estudio del modelo matemático radica en los efectos no inerciales sobre el Acrobot.

Considere el sistema Acrobot sobre un carro con aceleración horizontal constante \bar{w} , representada en la Fig.4.1, con los parámetros descritos en la Tabla 4.1; donde la dinámica del Acrobot se ve afectada por el movimiento del carro, esto significa que el Acrobot está bajo un marco de referencia no inercial.

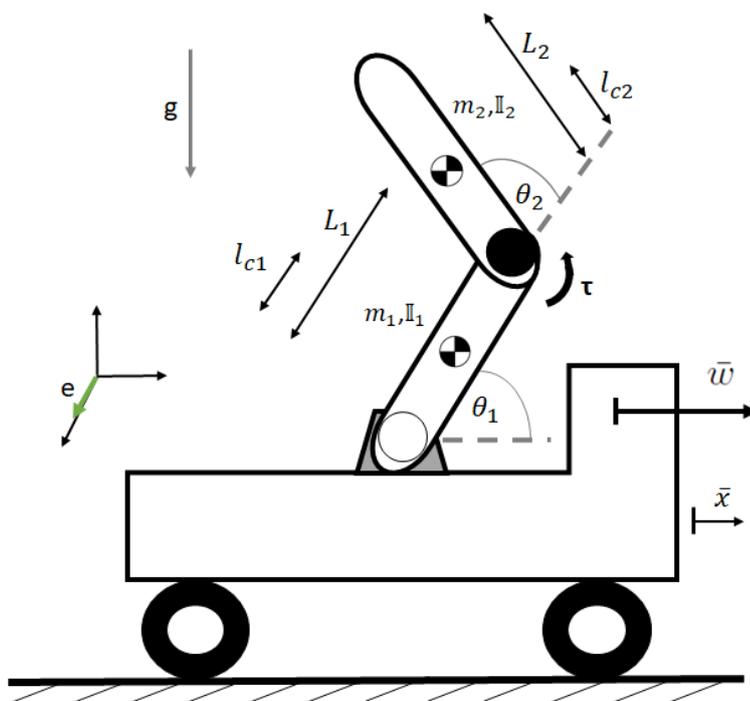


Figura 4.1: Sistema Acrobot bajo un marco de referencia no inercial.

Las coordenadas generalizadas para el sistema Acrobot sobre un carro, están definidas como:

$$q_1 := \theta_1, \quad q_2 = \theta_2$$

Como se puede observar, el desplazamiento \bar{x} no se incluye como una coordenada generalizada, esto es así para que durante en el desarrollo de las ecuaciones dinámicas, los efectos no inerciales inducidos por la dinámica de \bar{x} , ya que el carro se comporta como un marco de referencia acelerado, se pueda diferenciar de la dinámica del Acrobot.

Tabla 4.1: Parametetros del sistema.

| Notación | Descripción |
|------------------------------|--|
| \bar{w} | Aceleración horizontal del carro. |
| \bar{x} | Desplazamiento horizontal del carro. |
| θ_1 | Ángulo entre el eje horizontal y el eslabón 1. |
| θ_2 | Ángulo entre el eje horizontal y el eslabón 2. |
| τ | Entrada de control. |
| m_1, m_2 | Masas del eslabón 1 y 2. |
| L_1, L_2 | Longitudes del eslabón 1 y 2 |
| l_{c1}, l_{c2} | Distancia del eje al centro de masa del eslabón 1 y 2. |
| $\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2$ | Tensores de inercia de los eslabones 1 y 2. |
| g | Aceleración gravitacional. |
| \mathbf{e} | Vector unitario. |

La energía cinética E_c está representada por el siguiente término:

$$E_c = \sum_{i=1}^2 E_{c_{m_i}}$$

donde E_c se puede calcular aplicando el teorema de König,

$$\begin{aligned} E_{c_{m_i}} &= E_{c_{m_i, \mathcal{O}}} + E_{c_{m_i, rot-\mathcal{O}}} + m_i \langle \mathbf{v}_{i-CI}, \mathbf{v}_{\mathcal{O}} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_{\mathcal{O}}\|^2 + \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}_i, \mathbb{I}_{i, \mathcal{O}} \vec{\omega}_i \rangle + m_i \langle \mathbf{v}_{i-CI}, \mathbf{v}_{\mathcal{O}} \rangle \end{aligned}$$

El término $\mathbf{v}_{\mathcal{O}}$, es la velocidad del origen del sistema de coordenadas. $\mathbb{I}_{i, \mathcal{O}}$ es el tensor de inercia relativo al origen \mathcal{O} del sistema de coordenadas, y \mathbf{v}_{i-CI} es la velocidad

4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

del centro de inercia relativo al origen \mathcal{O} ; m_i representa la masa de cada eslabón del mecanismo, y $\vec{\omega}_i$ representa la velocidad rotacional de los eslabones del acrobot. En el caso del Acrobot la energía cinética está dada por la suma de las energías cinéticas individuales de cada eslabón. Además, para calcular la energía de los eslabones, es necesario tomar en cuenta su componente rotacional. En este sentido, la dirección de las velocidades angulares de los eslabones del Acrobot está representada por el vector unitario $\mathbf{e} = [0 \ 0 \ 1]^T$ que describe la rotación como ortogonal al plano de movimiento. Por lo tanto, los vectores de las velocidades angulares del acrobot se definen de la siguiente manera [19]:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_1 &:= \dot{\theta}_1 \mathbf{e} = \dot{q}_1 \mathbf{e} \\ \vec{\omega}_2 &:= (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \mathbf{e} = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \mathbf{e}\end{aligned}$$

y, los tensores de inercia de cada eslabón, respectivamente; tomando en cuenta que $l_{c1} = \frac{L_1}{2}$, $l_{c2} = \frac{L_2}{2}$, quedan descritos como

$$\mathbb{I}_{1,\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} I_{1,xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m_1L_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}_{2,\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} I_{2,xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m_2L_2^2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, podemos calcular cada energía de la siguiente manera

Energía cinética de m_1

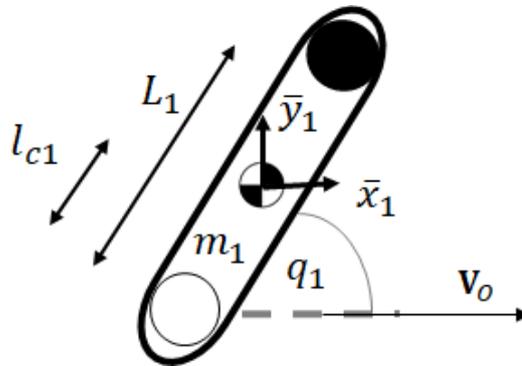


Figura 4.2: Eslabón 1 del acrobot.

Aplicando el teorema de Konig,

$$E_{c_{m_1}} = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_0\|^2 + \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}_1, \mathbb{I}_{1,0} \vec{\omega}_1 \rangle + m_1 \langle \mathbf{v}_{1-CI}, \mathbf{v}_0 \rangle$$

donde

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{v}_{1-CI} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -lc_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) \\ lc_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_{c_{m_1}} &= \frac{1}{2} m_1 \left(\sqrt{\begin{bmatrix} \dot{x} & 0 \\ 0 & \dot{x} \end{bmatrix}} \right)^2 + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \mathbf{e}^\top) \mathbb{I}_1 (\dot{q}_1 \mathbf{e}) + \\ &\quad m_1 \begin{bmatrix} -lc_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) & lc_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_1 L_1^2 \right) \dot{q}_1^2 - m_1 l_{c1} \dot{x} \dot{q}_1 \sin(q_1) \end{aligned}$$

Energía cinética de m_2

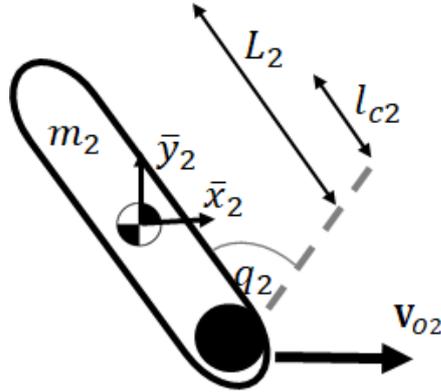


Figura 4.3: Eslabón 2 del acrobot.

Aplicando el teorema de Konig,

$$E_{c_{m_2}} = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_{0_2}\|^2 + \frac{1}{2} \langle \omega_2, \mathbb{I}_{2,0} \vec{\omega}_2 \rangle + m_2 \langle \mathbf{v}_{2-CI}, \mathbf{v}_{0_2} \rangle$$

4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

donde

$$\mathbf{v}_{O_2} = \begin{bmatrix} \dot{x} - L_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) \\ L_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{2-CI} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -lc_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2) \\ lc_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_{c_{m_2}} &= \frac{1}{2} m_2 \left(\sqrt{\begin{bmatrix} \dot{x} - L_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) & L_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} - L_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) \\ L_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix}} \right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \mathbf{e}^\top \mathbb{I}_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \mathbf{e} + \\ &\quad m_2 \begin{bmatrix} -lc_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2) & lc_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} - L_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) \\ L_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 - m_2 L_1 \dot{x} \dot{q}_1 \sin(q_1) + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{q}_1^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_2 L_2^2 \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 L_1 l_{c2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) - \\ &\quad m_2 l_{c2} \dot{x} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

de lo anterior se obtiene que,

$$E_c = E_{c_{m_1}} + E_{c_{m_2}} \quad (4.1)$$

Energía potencial del sistema

La energía potencial del sistema Acrobot esta dada por

$$E_p = (m_1 l_{c1} + m_2 L_1) g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2) + cte \quad (4.2)$$

donde $cte \in \mathbb{R}$ es constante.

Por lo tanto, a partir de la ecuación (4.2) y la ecuación (4.1), se puede aplicar el bien conocido metodo de Lagrange (ref) de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

donde τ_i representa las fuerzas generalizadas que actúan en el sistema.

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 - \phi\dot{q}_2^2 - 2\phi\dot{q}_1\dot{q}_2 + (h_1 + h_2)g &= \delta_1 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \phi\dot{q}_1^2 + h_2g &= \tau + \delta_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

y cuyos coeficientes son,

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_2L_1^2 + \frac{1}{3}m_1L_1^2 + \frac{1}{3}m_2L_2^2 + 2m_2L_1l_{c2}\cos(q_2) \\ m_{12} &= m_{21} = \frac{1}{3}m_2L_2^2 + m_2L_1l_{c2}\cos(q_2) \\ m_{22} &= \frac{1}{3}m_2L_2^2 \\ \phi &= m_2L_1l_{c2}\sin\theta_2 \\ h_1 &= (m_1l_{c1} + m_2L_1)\cos\theta_1 \\ h_2 &= m_2l_{c2}\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \delta_1 &= [(m_1l_{c1} + m_2L_1)\sin(q_1) + m_2l_{c2}\sin(q_1 + q_2)]\bar{w} \\ \delta_2 &= [m_2l_{c2}\sin(q_1 + q_2)]\bar{w} \end{aligned}$$

done $\bar{w} = \ddot{x}$, $\tau \in \mathbb{R}$ es la entrada de control del sistema, y $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ son los efectos no inerciales inducidos por el movimiento del carro.

La forma matricial del sistema (4.4) puede ser representada como

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = U \quad (4.5)$$

$\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^2$ representa el vector de coordenadas generalizadas, y la matriz de inercia se describe

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

La matriz de fuerzas centrípetas y Coriolis se presenta como

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -2\phi_1\dot{q}_2 & -\phi_1\dot{q}_2 \\ \phi_1\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El vector de gravedad está dado por,

$$G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (h_1 + h_2)g & h_2g \end{bmatrix}^T$$

El vector de fuerzas generalizadas se presenta de la siguiente manera

$$U = \begin{bmatrix} \delta_1 & \tau + \delta_2 \end{bmatrix}^T$$

4.1.2. Espacio de estados del sistema Acrobot sobre un carro

Las ecuaciones dinámicas (4.5) se pueden modelar en representación de espacio de estados con respecto a las aceleraciones. Para lograr esto, es necesario asegurarse de que el determinante de M ($\det(M)$) sea diferente de cero, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \det(M) &= m_{11}m_{22} - m_{12}^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}m_2L_2^2\right) \left(m_2L_1^2 + \frac{1}{3}m_1L_1^2 + \frac{1}{3}m_2L_2^2 + 2m_2L_1l_{c2} \cos(q_2)\right) - \\ &\quad \left(\frac{1}{3}m_2L_2^2 + m_2L_1l_{c2} \cos(q_2)\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}m_2^2L_1^2L_2^2 + \frac{1}{9}m_1m_2L_1^2L_2^2 + \frac{1}{9}m_2^2L_2^4 + \frac{2}{3}m_2^2L_1L_2^2l_{c2} \cos(q_2) - \\ &\quad \frac{1}{9}m_2^2L_2^4 - \frac{2}{3}m_2^2L_1L_2^2l_{c2} \cos(q_2) - m_2^2L_1^2l_{c2}^2 \cos^2(q_2) \\ &= \frac{1}{3}m_2^2L_1^2L_2^2 + \frac{1}{9}m_1m_2L_1^2L_2^2 - m_2^2L_1^2l_{c2}^2 \cos^2(q_2) \end{aligned}$$

donde $l_{c2} = \frac{L_2}{2}$, entonces

$$\det(M) = m_2^2L_1^2L_2^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cos^2(q_2)\right) + \frac{1}{9}m_1m_2L_1^2L_2^2$$

dado que, $\cos^2(q_2) \in [0, 1]$, entonces $\det(M) > 0$.

Entonces la ecuación (4.5) se reorganiza y se multiplica por la matriz de inercia inversa $M^{-1}(\mathbf{q})$, dando como resultado la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}} &= M^{-1}[U - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - G(\mathbf{q})] \\ &= \begin{bmatrix} \delta_1 + \mu_1 \\ \tau + \delta_2 + \mu_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

donde

$$\mu_1 = -\phi_1 \dot{q}_2^2 - 2\phi_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (h_1 + h_2)g$$

$$\mu_2 = \phi_1 \dot{q}_1^2 + h_2 g$$

La matriz inverza M^{-1} está dada por

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} \\ \bar{m}_{12} & \bar{m}_{22} \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{m}_{11} := \frac{m_{22}}{m_{11}m_{22} - m_{12}^2}$$

$$\bar{m}_{12} := m_{21} = \frac{-m_{12}}{m_{11}m_{22} - m_{12}^2}$$

$$\bar{m}_{22} := \frac{m_{11}}{m_{11}m_{22} - m_{12}^2}$$

Las aceleraciones están dadas, entonces, por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= \bar{m}_{11}(\delta_1 + \mu_1) + \bar{m}_{12}(\tau + \delta_2 + \mu_2) \\ \ddot{q}_2 &= \bar{m}_{12}(\delta_1 + \mu_1) + \bar{m}_{22}(\tau + \delta_2 + \mu_2)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Las ecuaciones (4.6) pueden ser reducidas sustituyendo:

$$\begin{aligned}f_1(t, q(t)) &= \bar{m}_{11}(\delta_1 + \mu_1) + \bar{m}_{12}(\delta_2 + \mu_2) \\ f_2(t, q(t)) &= \bar{m}_{12}(\delta_1 + \mu_1) + \bar{m}_{22}(\delta_2 + \mu_2)\end{aligned}$$

4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Estos términos representan efectos no deseados que actúan en el sistema (4.4). Los efectos no inerciales δ_1, δ_2 inducidos por el carro se incluyen como parte de f_1, f_2 . Así,

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= f_1(t, q) + \bar{m}_{12}\tau(t) \\ \ddot{q}_2 &= f_2(t, q) + \bar{m}_{22}\tau(t)\end{aligned}$$

El espacio de estados se define de la siguiente manera:

$$x := [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

Por lo tanto, el sistema dinámico, en la representación de espacio de estados está dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_1(t, x(t)) + \bar{m}_{12}\tau(t) \\ f_2(t, x(t)) + \bar{m}_{22}\tau(t) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

4.2. Control por Modos Deslizantes

La propuesta de control para el sistema Acrobot sobre un carro en un marco de referencia no inercial se basa en una metodología de control por Modos Deslizantes de primer orden. El objetivo de esta estrategia de control es estabilizar los estados de posición del Acrobot en la postura invertida, al tiempo que se rechazan los efectos no inerciales no deseados inducidos por el carro en movimiento. Algunos enfoques de control robustos para sistemas tipo péndulo invertido están diseñados como un control de switcheo, con una parte que proporciona el impulso para elevar los péndulos, y otra parte que realiza el control de equilibrio. El enfoque presentado en este trabajo no tomará en consideración la fase de impulso, ya que el sistema estará configurado, como condición inicial, en la **posición invertida**:

$$x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right)$$

Para diseñar la ley de control de modos deslizantes, es necesario definir una variable deslizante. La variable deslizante debe en cuenta los estados del Acrobot (4.7). La idea principal de la estrategia de modos deslizantes es que los estados del sistema se deslizan a lo largo de una superficie deslizante, descrita por una variable deslizante, para estabilizar y rechazar los efectos no deseados. Esta variable de deslizamiento particular se elige para que el sistema tenga una respuesta de orden reducida deseable cuando se le restringe a este comportamiento [23]. Por lo tanto, la **variable deslizante** se define como:

$$s := c_1x_1 + c_2x_2 + x_3 + x_4, \quad c_1, c_2 > 0 \quad (4.8)$$

La derivada de la variable deslizante 4.8 es obtenida como

$$\begin{aligned}\dot{s} &= f_1(x, t) + f_2(x, t) + c_1x_3 + c_2x_4 + \\ &\quad (\bar{m}_{12} + \bar{m}_{22})\tau(t) \\ &= \varphi(x, t) + c_1x_3 + c_2x_4 + \bar{m}\tau\end{aligned}\tag{4.9}$$

donde $\bar{m} = \bar{m}_{12} + \bar{m}_{22}$, y los efectos no deseados $f_1(x, t) + f_2(x, t)$ se agruparon en

$$\varphi(x, t) := f_1(x, t) + f_2(x, t)$$

Para lograr la convergencia asintótica de las variables de estado en presencia de un efecto no deseado $\varphi(x, t)$, es necesario dirigir la variable (4.8) a la estabilidad en tiempo finito a través de una ley de control. Este problema se puede resolver insertando la variable s en una función candidata Lyapunov. Por lo tanto, la función candidata Lyapunov basada en (4.8) tiene la forma:

$$V = \frac{1}{2}s^2\tag{4.9}$$

Para que la variable (4.9) sea estable, se deben cumplir las siguientes condiciones

- (a) $\dot{V} < 0$ for $s \neq 0$
- (b) $\lim_{|s| \rightarrow \infty} V = \infty$

La condición (b) es satisfecha por (4.9). Para que la variable deslizante (4.8) alcance la convergencia en tiempo finito, la condición (a) se transforma en:

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2}, \alpha > 0\tag{4.10}$$

Si (4.10) es integrada sobre $0 \leq t_r \leq t$, se obtiene

$$V^{1/2}(t) \leq -\frac{1}{2}\alpha t + V^{1/2}(0)$$

Si $V(t)$ alcanza la estabilidad en tiempo finito entonces t_r está acotada por

$$t_r \leq \frac{2V^{1/2}(0)}{\alpha}$$

Es necesario proponer una ley de control basada en la función deslizante que satisfaga la condición (b) para que el sistema se estabilice. La derivada de (4.9) se calcula como

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(c_1x_3 + c_2x_4 + \varphi(t, x) + \bar{m}\tau(t))$$

Proponiendo $\tau(t) = \frac{1}{\bar{m}}(\nu - c_1x_3 - c_2x_4)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s(\varphi(t, x) + \nu) = s\varphi(t, x) + s\nu \\ &\leq |s|L + s\nu\end{aligned}$$

Seleccionando $\nu = -K \text{sign}(s)$ with $K > 0$, donde

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s > 0 \\ [-1, 1] & \text{if } s = 0 \\ -1 & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

Entonces se tiene

$$\dot{V} \leq |s|L - |s|K = -|s|(K - L) \quad (4.11)$$

Considerando la función (4.9), la condición (4.10) se transforma en

$$\dot{V} \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|s|, \alpha > 0 \quad (4.12)$$

e igualando la condición (4.11) y (4.12) se obtiene,

$$\dot{V} \leq -|s|(K - L) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|s| = -\alpha V^{1/2} \quad (4.13)$$

A partir de (4.13), la ganancia del controlador puede ser calculada como

$$K = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + L \quad (4.14)$$

donde $L \geq 0$. Por lo tanto, la ley de control que estabiliza el sistema en tiempo finito es

$$\tau(t) = \frac{1}{\bar{m}}(-K \text{sign}(s) - c_1x_3 - c_2x_4) \quad (4.15)$$

4.3. Control por SúperTorsión

Para diseñar la ley de control de Super-Twisting, se utilizara la variable de deslizamiento (4.8) y su derivada (4.9), previamente definida. El algoritmo de Super-Twisting está basado en Modos Deslizantes de segundo orden. Esta estrategia, no solo puede estabilizar y rechazar los efectos no inerciales, sino que aminora el Chattering inducido

naturalmente por los Modos Deslizantes. Para este caso, el sistema Acrobot sobre un carro se vuelve a establecer en las condiciones iniciales (3.1), que corresponden a la postura invertida del Acrobot.

por lo anterior, si $\varphi(x, t) = 0$, entonces la ley de control es descrita como

$$\tau = -\frac{1}{\bar{m}}(a|s|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s) + c_1x_3 + c_2x_4), a > 0$$

entonces la dinámica compensada de la variable de deslizamiento (4.8) se vuelve,

$$\dot{s} = -a|s|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s), \quad s(0) = s_0 \quad (4.10)$$

Integrando la ecuación 4.10,

$$|s(t)|^{\frac{1}{2}} - |s_0|^{\frac{1}{2}} = -\frac{a}{2}t$$

Entonces, el tiempo de alcance en este caso sería

$$t_r = \frac{2}{a}|s_0|^{\frac{1}{2}}$$

Esto significa que el control τ mueve la variable deslizante a la estabilidad en tiempo finito. Sin embargo, cuando $\varphi(x, t) \neq 0$, la dinámica compensada se convierte en

$$\dot{s} = \varphi(x, t) - a|s|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s), \quad s(0) = s_0$$

Por lo tanto, la convergencia no se consigue.

Dado $\varphi(x, t) \neq 0$ y $|\dot{\varphi}(x, t)| \leq L$, la estabilidad de la variable deslizante se logrará en tiempo finito si se agrega un nuevo término a la ley de control de la siguiente manera,

$$\begin{cases} \tau = -\frac{1}{\bar{m}}(a|s|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s) - w - c_1x_3 - c_2x_4) \\ \dot{w} = b \text{sign}(s), \quad b > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Por consiguiente, la dinámica de la variable deslizante compensada se convierte en

$$\dot{s} = \varphi(x, t) + a|s|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s) + w \quad (4.12)$$

La ecuación (4.11) se denomina controlador ST que fuerza las ecuaciones (4.8) y (4.12) a la convergencia haciendo w igual a $\varphi(x, t)$ en tiempo finito, por lo tanto, los estados del acrobot deben estar estabilizados en tiempo finito. Además, la estabilidad de cualquier controlador ST puede garantizarse mediante la siguiente función Lyapunov tal como se presentó en [17]:

$$V(s, \dot{s}) = \zeta^T P \zeta \quad (4.16)$$

donde

$$\zeta = [|s|^{1/2} \text{sign}(s), \dot{s}]$$

$$P_v = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4k_3 + k_1^2 & -k_1 \\ -k_1 & 2 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con el *Teorema 2* en [17], si $k_1, k_3 > 0$, todas las trayectorias de (4.8) convergerán en tiempo finito; en un tiempo $t(s_0)$ menor que $T = 2V^{1/2}(s_0)/\gamma$, donde s_0 es la condición inicial de l superficie deslizante y γ es una constante que depende de las ganancias k_1, k_3 . Además, la función Lyapunov (4.16) proporciona una respuesta de estabilidad sólida si las siguientes propiedades están garantizadas:

$$\dot{V} = \frac{1}{|s|^{1/2}} \zeta^T Q \zeta \leq -\gamma V^{1/2}(s) \quad (4.17)$$

donde

$$Q_v = \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} 2k_3 + k_1^2 & -k_1 \\ -k_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \frac{\lambda_{\min}^{1/2}(P_v) \lambda_{\min}(Q_v)}{\lambda_{\max}(P_v)}$$

Por lo tanto, dada la función (4.16) y la condición (4.17), el caso particular de la función deslizante (4.8) debe lograr la convergencia en tiempo finito de acuerdo con (4.17).

Conclusión

En éste capítulo se presentó el modelado del sistema Acrobot sobre un carro através del teorema de Konig y las ecuaciones de Lagrange con respecto de un sistema referencial mecánico no inercial, y se definieron los efectos no inerciales que inducidos en el sistema. Se presentó el sistema en forma de espacios de estados, para posteriormente desarrollar los algoritmos de control basados en MD y ST. A su vez, se analizó la estabilidad asintótica para ambos controladores.

Simulación y resultados

En este capítulo se presentan y analizan los resultados adquiridos en las pruebas de simulación realizadas con el software Matlab/Simulink, para el sistema del Acrobot sobre un carro en lazo cerrado, el controlador por MD de primer orden como para el algoritmo de control por ST. Se presentan también, los parámetros físicos del sistema, así como las ganancias utilizadas en los controladores a para cada caso. Finalmente, se discuten los resultados obtenidos en este trabajo.

5.1. Simulación del sistema Acrobot sobre un carro sin acción de control

Se realizó la simulación del sistema Acrobot sobre un carro para entrada libre, sin control ni aceleración, y para el sistema bajo aceleración constante, con la finalidad de observar la dinámica del sistema previo la simulación de las leyes de control propuestas. El programa de simulación es presentado en Matlab-Simulink se presenta en Fig.5.1, y fue realizado en el ambiente de programación Matlab/Simulink, las constantes físicas del sistema Acrobot sobre un carro se presentan en la tabla (5.1). En Fig.5.2, Fig.5.3, Fig.5.4, Fig.5.5; se analiza la respuesta de los estados de posición angular de los eslabones 1 y 2, con condiciones iniciales,

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right)$$

y,

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right)$$

para dos casos, uno sin entradas de control ni aceleraciones inducidas por el carro, y otro caso para el acrobot bajo aceleración constante. Para éste último, se aplicó una aceleración constante para inducir un efecto no inercial sobre el acrobot, esta aceleración tiene una magnitud de $0.5m/s^2$ y es constante durante todo el tiempo de simulación.

5. SIMULACIÓN Y RESULTADOS

Tabla 5.1: Constantes físicas del sistema Acrobot sobre un carro.

| Parámetro | Valor numérico | Parámetro | Valor numérico |
|-----------|----------------|-----------|----------------|
| m_1 | $0.265kg$ | \bar{w} | $0.5m/s^2$ |
| m_2 | $0.265kg$ | g | $9.8m/s^2$ |
| L_1 | $0.206m$ | l_{c1} | $0.103m$ |
| L_2 | $0.206m$ | l_{c2} | $0.103m$ |

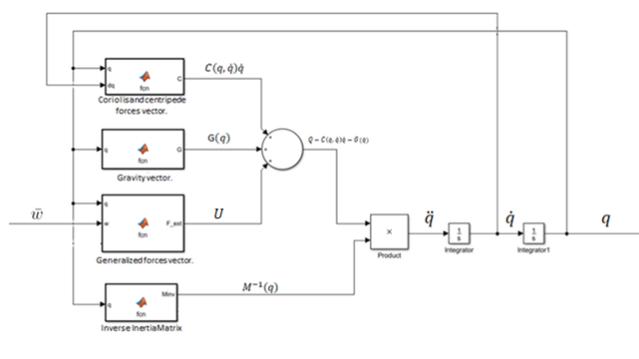
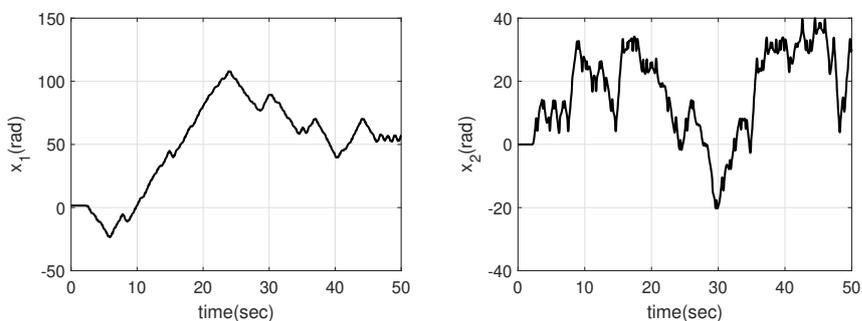


Figura 5.1: Diagrama de bloques Acrobot sobre un carro sin control.

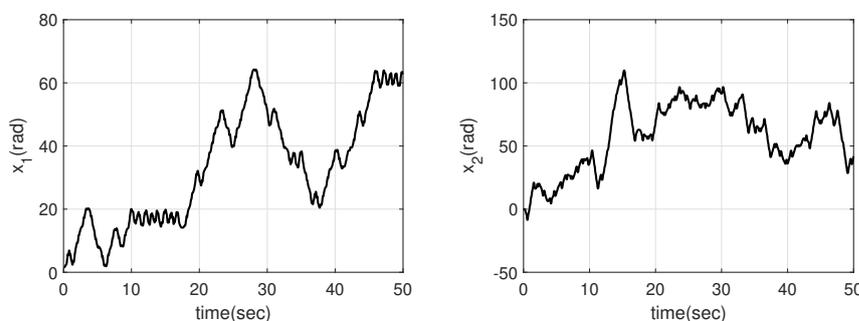
Las respuestas de los estados x_1 y x_2 , que corresponden a las posiciones angulares de los eslabones 1 y 2 bajo entrada libre del acrobot se presentan en la Fig.5.2. En Fig.5.2(a) y Fig.5.2(b) sistema exhibe un comportamiento inestable, esto se entiende físicamente ya que los eslabones del acrobot tras ser colocados en su posición inicial (invertida), y al ser esta un posición inestable debido a la acción de la gravedad g , se ven forzados a caer; esto provoca una dinámica que ante la ausencia de fricción o de una acción de control, tiende a la inestabilidad. Cabe mencionar, que los eslabones del acrobot permanecen estables por un breve período de tiempo de aproximadamente 2.5 segundos antes de caer por efecto gravitacional.



(a) Posición angular x_1 con $x_1(0) = \frac{\pi}{2}$. (b) Posición angular x_2 con $x_2(0) = 0$.

Figura 5.2: Respuesta de estados de posición del acrobot con entrada libre.

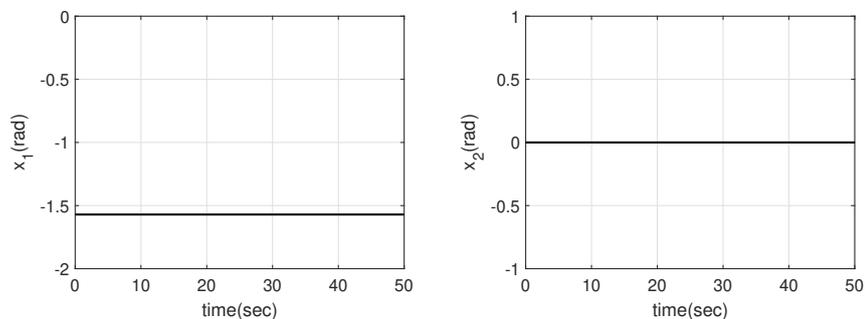
Se hace la misma simulación pero ahora incluyendo el efecto de una aceleración horizontal constante (ver Fig. 5.3). Los estados x_1 y x_2 en las Fig.5.3(a) y Fig.5.3(b) muestran que el sistema sigue siendo inestable como era de esperarse. En este caso el efecto de la aceleración horizontal \bar{w} puede notarse en el hecho de que a diferencia de la simulación anterior, se puede apreciar que ya no permanece estable al principio sino que directamente los eslabones del acrobot caen y comienzan a girar.



(a) Posición angular x_1 con $x_1(0) = \frac{\pi}{2}$. (b) Posición angular x_2 con $x_2(0) = 0$.

Figura 5.3: Respuesta de estados posición del acrobot bajo aceleración constante.

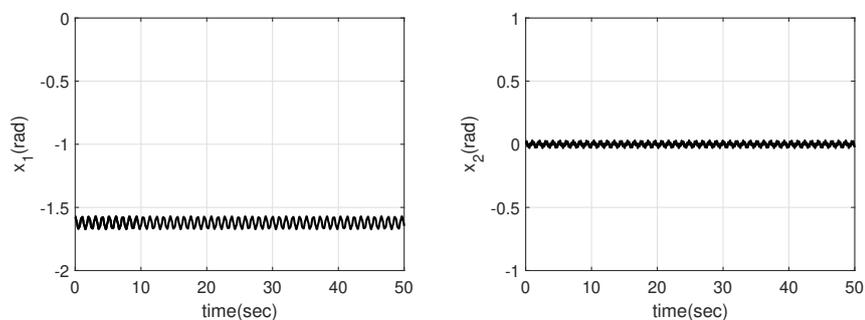
En las gráficas presentadas en la Fig.5.4, se muestra la simulación para las condiciones iniciales $x_1(0) = -\frac{\pi}{2}$, $x_2(0) = 0$ que corresponde a la posición hacia abajo con respecto del plano de movimiento mostrado en Fig.4.1. En estas gráficas se puede apreciar que la posición angular de los eslabones 1 y 2, expuestas en las Fig. 5.4(a) y 5.4(b), respectivamente; se encuentran estables. Este comportamiento se esperaba dado que el acrobot no puede desarrollar ningún trabajo en esa postura sin alguna fuerza externa.



(a) Posición angular x_1 con $x_1(0) = \frac{-\pi}{2}$. (b) Posición angular x_2 con $x_2(0) = 0$.

Figura 5.4: Respuesta de estados de posición del acrobot con entrada libre.

Para las mismas condiciones iniciales de la simulación anterior, se presenta el acrobot bajo una aceleración constante \bar{w} transmitida por físicamente por el movimiento del carro. A diferencia con la respuesta obtenida en la Fig.5.3 que muestra grandes oscilaciones, se puede observar en las Fig.5.5(a) y Fig.5.5(b), que la introducción de la aceleración produce una pequeña oscilación en los eslabones del acrobot. Dicha oscilación permanece constante al ser la aceleración sobre el sistema también constante.



(a) Posición angular x_1 con $x_1(0) = \frac{-\pi}{2}$. (b) Posición angular x_2 con $x_2(0) = 0$.

Figura 5.5: Respuesta de estados posición del acrobot bajo aceleración constante.

5.2. Simulación del sistema Acrobot sobre un carro con Control por Modos Deslizantes

Se llevó a cabo una simulación para el sistema Acrobot sobre un carro para probar el rendimiento del controlador basado en MD. El modelo numérico Matlab-Simulink se

5.2 Simulación del sistema Acrobot sobre un carro con Control por Modos Deslizantes

presenta en la Fig.5.6, los parámetros físicos del sistema (4.4) y la ganancia propuesta K en (4.14) para la ley de control (4.15), utilizada en la simulación numérica se muestra en la Tabla 5.2. Las condiciones iniciales se eligen en el punto de equilibrio inestable (invertido) del acrobot,

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right)$$

el objetivo del controlador es devolver los estados del acrobot a la misma posición que tiene como condición inicial. Adicionalmente, se aplicó una aceleración constante sobre el carro para inducir un efecto no inercial sobre el sistema, esta aceleración tiene una magnitud de $0.5m/s^2$ y es constante durante todo el tiempo de simulación.

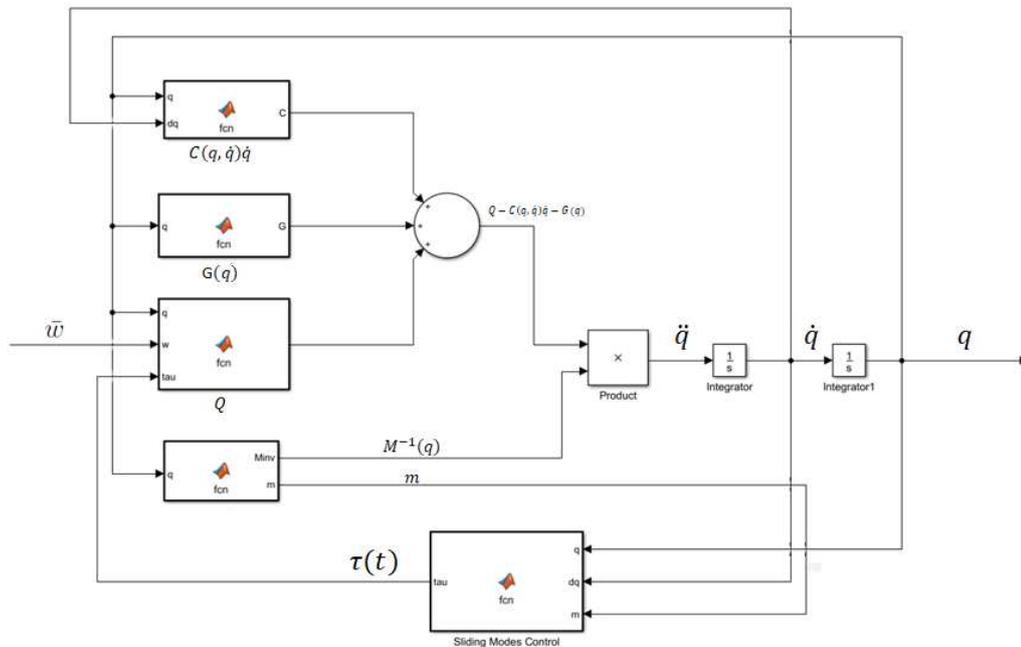


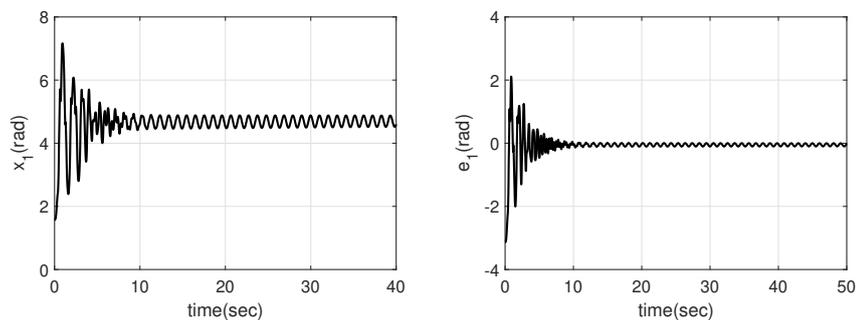
Figura 5.6: Matlab-Simulink model.

5. SIMULACIÓN Y RESULTADOS

Tabla 5.2: Parámetros del modelo - CMD.

| Parámetro | Valor numérico | Parámetro | Valor numérico |
|-----------|----------------|-----------|----------------|
| m_1 | $0.265kg$ | c_1 | 1 |
| m_2 | $0.265kg$ | c_2 | 1 |
| L_1 | $0.206m$ | g | $9.8m/s^2$ |
| L_2 | $0.206m$ | \bar{w} | $0.5m/s^2$ |
| l_{c1} | $0.103m$ | K | 0.939 |
| l_{c2} | $0.103m$ | | |

Los resultados de la simulación para la estabilización por MD del estado de posición angular del eslabón 1 del acrobot se presenta en la Fig.5.7. En la Fig.5.7(a) se muestra que el estado respectivo x_1 del eslabón 1, comienza desde la condición inicial $\frac{\pi}{2}$ y luego se estabiliza muy cerca de 4.7124 radianes o $\frac{3\pi}{2}$ radianes lo que significa, físicamente, que el primer eslabón realiza algunos giros completos y oscilaciones antes de estabilizarse en posición vertical, que corresponde a la misma postura que en las condiciones iniciales. En la Fig. 5.7(b) se muestra el error de posición angular del estado x_1 . Este error corresponde a la diferencia entre el valor actual del estado x_1 y el valor deseado $x_{d1} = \frac{3\pi}{2}$. Este error queda definido como: $e_1 := x_1 - x_{d1}$. Tanto la respuesta para x_1 como para e_1 , muestran que la posición del eslabón 1 converge en tiempo finito. Además, dado que el sistema se ve afectado por efectos no inerciales inducidos por la aceleración del carro, el CMD exhibe cierto grado de robustez.

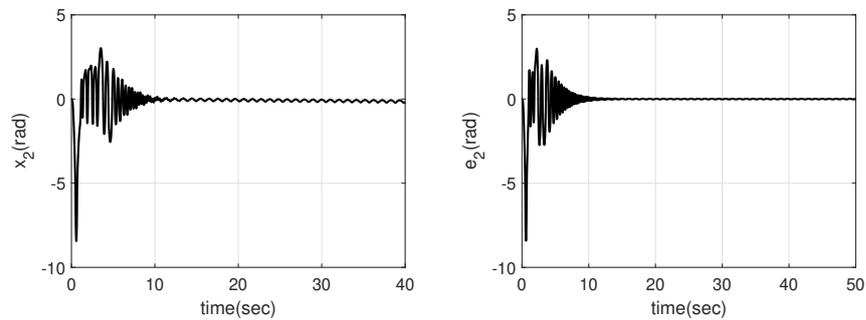


(a) Posición angular del primer eslabón- (b) Error de posición angular del primer
CMD. eslabón-CMD.

Figura 5.7: Respuesta estado x_1 y error de estado e_1 con Modos Deslizantes.

5.2 Simulación del sistema Acrobot sobre un carro con Control por Modos Deslizantes

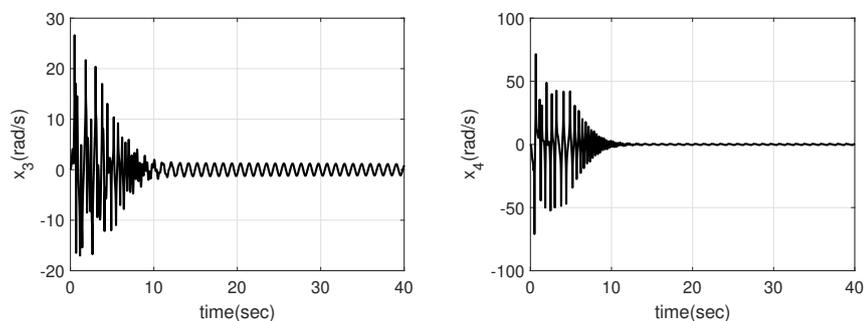
Para el estado x_2 , los resultados de estabilización por modos deslizantes se muestran en la Fig.5.8. La condición inicial de x_2 se estableció en $x_2(0) = 0$ radianes. La respuesta de este estado en la Fig.5.8(a) muestra que, físicamente el segundo eslabón realiza algunos giros antes de estabilizarse muy cerca de 0 radianes. En las Fig. 5.7(b), se muestra el error de posición angular del estado x_2 . Este error corresponde a la diferencia entre el valor actual de x_2 y el valor deseado $x_{d2} = 0$, queda definido como: $e_2 := x_2 - x_{d2}$. Los resultados en 5.8 muestran que el controlador por MD fuerza a la posición angular del eslabón 2, a converger en tiempo finito y rechaza los efectos inerciales inducidos por la aceleración \bar{w} .



(a) Posición angular del segundo eslabón- (b) Error de posición angular del segundo
CMD. eslabón-CMD.

Figura 5.8: Respuesta estado x_1 y error de estado e_1 con Modos Deslizantes.

La Fig.5.9 muestran la respuesta de los estados que corresponden a las velocidades angulares del Acrobot. El estado x_3 en Fig.5.9(a) y el estado x_4 en Fig.5.9(b) alcanzan la estabilidad en tiempo finito, volviéndose casi 0 rad/s conforme el controlador por MD estabiliza la postura del acrobot.



(a) Velocidad angular del primer eslabón- (b) Velocidad angular del segundo es-
 CMD labón-CMD.

Figura 5.9: Respuesta estado x_3 y estado x_4 con Modos Deslizantes.

5.3. Simulación del sistema Acrobot sobre un carro con Control por SúperTorsión

Se realizó una simulación para el sistema Acrobot para probar el rendimiento del controlador de SúperTorsión. El modelo numérico Matlab-Simulink se presenta en la Fig.5.10, los parámetros físicos en las ecuaciones del sistema (4.5) y las ganancias a y b en la ecuación (4.11), que se calcularon a través del software Matlab/Simulink, se usaron en la simulación, se muestra en la Tabla 5.3. Las condiciones iniciales, y se eligen en el punto de equilibrio inestable del acrobot,

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right)$$

, donde el objetivo del controlador es llevar los estados del acrobot al mismo punto correspondiente a la posición vertical del eslabón 1 en $\frac{\pi}{2}$ radianes y a la posición vertical del eslabón 2 a 0 radianes, de acuerdo con el marco de referencia establecido en la Fig. 4.1. Adicionalmente, se aplicó una aceleración constante en el carro para inducir un efecto no inercial en el sistema, la aceleración tiene una magnitud de $0.5m/s^2$ y es constante durante todo el tiempo de simulación.

5.3 Simulación del sistema Acrobot sobre un carro con Control por SúperTorsión

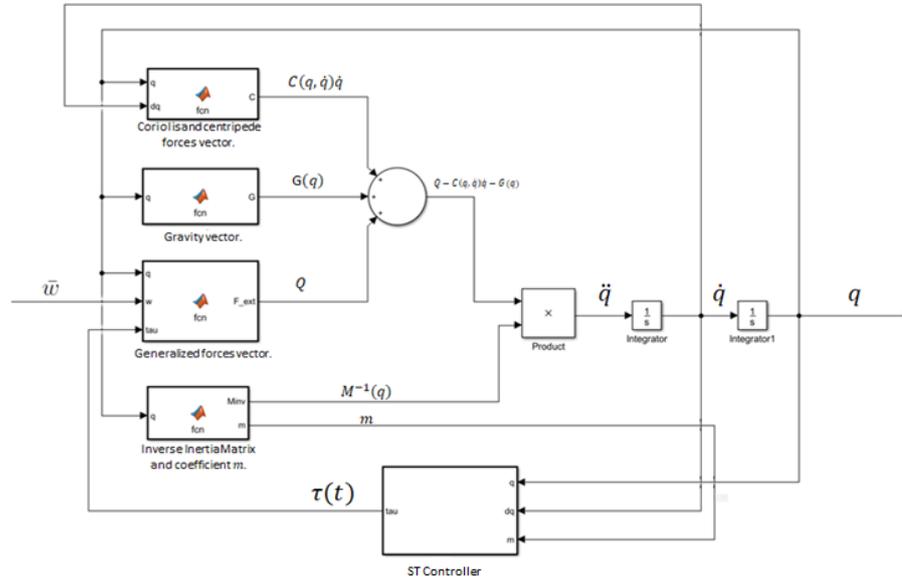


Figura 5.10: Programa en bloques del control por SúperTorsión en Matlab/simulink.

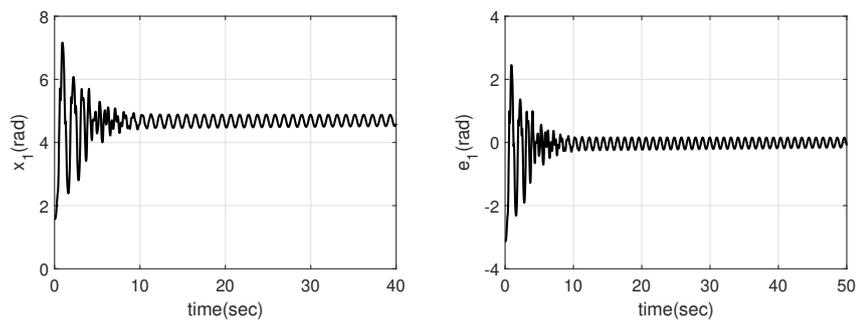
Tabla 5.3: Parámetros de modelo - SuperTwisting.

| Parameter | Numerical value | Parameter | Numerical value |
|------------|-------------------------------|------------|-------------------------------|
| m_1 | $0.265kg$ | c_1 | 1 |
| m_2 | $0.265kg$ | c_2 | 1 |
| L_1 | $0.206m$ | g | $9.8m/s^2$ |
| L_2 | $0.206m$ | \bar{w} | $0.5m/s^2$ |
| l_{c1} | $0.103m$ | a | 1.5739 |
| l_{c2} | $0.103m$ | b | 1.2111 |
| $I_{1,zz}$ | $2.3428 \times 10^{-04}kgm^2$ | $I_{2,zz}$ | $2.3428 \times 10^{-04}kgm^2$ |

Los resultados de simulación para los estados de posición angular de los eslabones del acrobot se presentan en las Fig. 5.11 y Fig. 5.12. El controlador de ST estabiliza ambos estados x_1 y x_2 . En la Fig. 5.11(a) se muestra que el estado respectivo x_1 del eslabón 1,

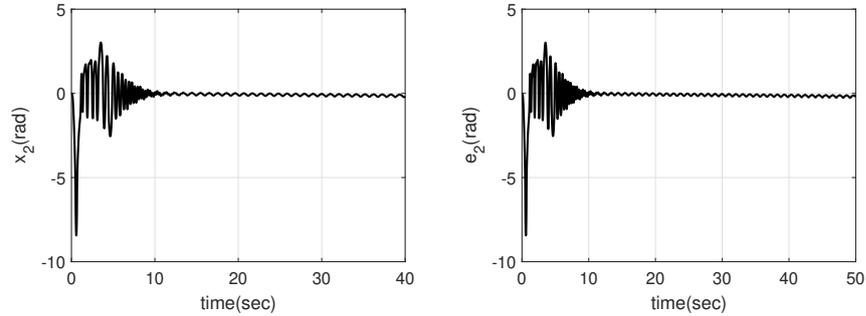
5. SIMULACIÓN Y RESULTADOS

comienza desde la condición inicial $\frac{\pi}{2}$ y luego se estabiliza muy cerca de 4.7124 radianes o $\frac{3\pi}{2}$ radianes lo que significa, físicamente, que el primer eslabón realiza algunos giros completos y oscilaciones antes de estabilizarse en posición vertical invertida. En la Fig. 5.7(b) se muestra el error de posición angular del estado x_1 . Este error corresponde a la diferencia entre el valor actual del estado x_1 y el valor deseado $x_{d1} = \frac{3\pi}{2}$. En la Fig. 5.12(a), se muestra la posición angular del eslabón 2 correspondiente al estado x_2 . Su la condición inicial del eslabón 2 se estableció en 0 radianes de acuerdo al diagrama mostrado en Fig.4.1. La respuesta de x_2 muestra que, físicamente el segundo eslabón realiza giros y oscilaciones pronunciados antes de estabilizarse en una posición muy cercana a 0 radianes (ver Fig.5.12(a)). En las Fig. 5.7(b), se muestra el error de posición angular del estado x_2 . Este error corresponde a la diferencia entre el valor actual de x_2 y el valor deseado $x_{d2} = 0$. Los resultados para ambos estados muestran que el controlador por ST consigue estabilizar la postura del acrobot en la forma invertida en tiempo finito. Además, debido que el sistema se ve afectado por efectos no inerciales inducidos por la aceleración \bar{w} , el controlador ST exhibe también, cierto grado de robustez. Tanto el desempeño del controlador por MD, mostrado anteriormente, como el control po ST consiguen una respuesta de estabilización y rechazo a el efecto no inercial muy similar.



(a) Posición angular del primer eslabón/ST. (b) Error de posición angular del primer eslabón/ST.

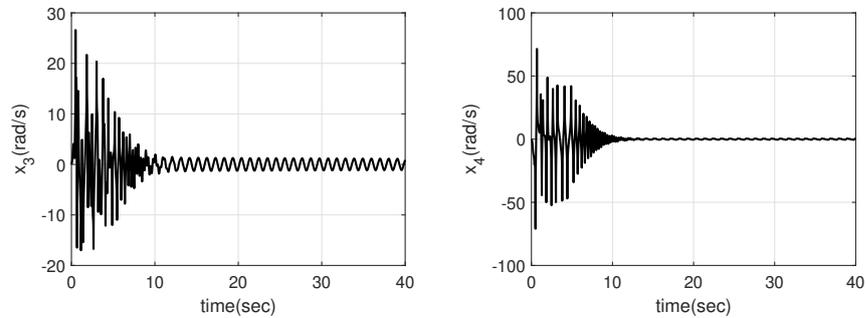
Figura 5.11: Respuesta estado x_1 y error de estado e_1 con SúperTorsión.



(a) Posición angular del segundo eslabón/ST. (b) Error de posición angular del segundo eslabón/ST.

Figura 5.12: Respuesta estado x_2 y error de estado e_2 con SúperTorsión.

La Fig. 5.13 muestra la respuesta de los estados x_3 y x_4 que corresponden a las velocidades angulares del acrobot. Tanto en la Fig.5.13(a) como en la Fig.5.13(b) se observa que ambos estados alcanzan la estabilidad conforme el controlador por ST estabiliza las posiciones angulares del acrobot, llevando por lo tanto a las velocidades x_3 y x_4 muy cerca de 0 rad/s .



(a) Velocidad angular del primer eslabón/ST. (b) Velocidad angular del segundo eslabón/ST.

Figura 5.13: Respuesta estado x_3 y estado x_4 con SúperTorsión.

Conclusión

En esta sección se propuso un enfoque matemático basado en una metodología clásica de ecuaciones de Lagrange para describir un Péndulo tipo Acrobot sobre un carro en un marco de referencia no inercial. Además, se diseñaron dos controladores basados en MD y ST para estabilizar las posiciones angulares de este sistema. Las estrategias lograron la estabilización de la postura del acrobot en su posición invertida, y mostraron gran robustez para rechazar los efectos indeseados no inerciales. Finalmente, los resultados mostraron que el sistema podía alcanzar la estabilidad en tiempo finito para ambos casos, exhibiendo una respuesta en estado transitorio y estable, muy similar.

Trabajo futuro

El Acrobot sobre un carro es un mecanismo que resulta muy interesante para la aplicación de técnicas de control robusto. En este sentido, la aplicación de un método de control basado en Modos Deslizantes adaptativo representa una propuesta prometedora para mejorar la suavidad con la que el controlador alcanza la estabilidad de este sistema. A su vez, quedaría pendiente la implementación en tiempo real en un prototipo del sistema Acrobot sobre un carro, de los controladores estudiados en esta tesis, para observar el funcionamiento de estos con la planta real.

Conclusión

En el desarrollo de esta tesis se dio a conocer la importancia de los sistemas tipo péndulo en el diseño de estrategias de control, esto debido a su intrínseco comportamiento físico no lineal, y al reto que supone el la elaboración de una ley de control que efectúe una tarea, y que a su vez tome en cuenta perturbaciones, incertidumbres del modelo, y efectos no inerciales. También, se presentó las descripción física y matemática de algunas configuraciones de mecanismos tipo péndulo, tales como pendubot, acrobot, y péndulo sobre un carro. Estos sistemas, se suelen tomar como sistemas inerciales o anclados, y para el caso de los péndulos montados sobre una plataforma móvil, ésta última suele tomarse como parte del sistema en el sentido de que la acción de control para estabilización de su conjunto, suele aplicarse sobre este eslabón mecánico. La propuesta del mecanismo presentado en este trabajo tomó al robot acrobot como un sistema no inercial, por lo que es afectado por una aceleración externa (inducida por una plataforma móvil) y es sobre una de las articulaciones de este mecanismo donde se aplicó la acción de control. Por otra parte, se presentaron los fundamentos teóricos para el modelado matemático de las ecuaciones que describen la dinámica de sistemas mecánicos no inerciales, esto las propiedades del CI de un cuerpo rígido, la interpretación matemática de las leyes de Newton respecto de un sistema de referencia mecánico no inercial, el teorema de steiner, el teorema de König para la ecuación de energía, y clásico metodo de las ecuaciones de Lagrange. Así mismo, se presentaron los fundamentos teóricos de sistemas con modos deslizantes, en su sentido matemático y físico. Se introdujo el concepto de estabilidad de Lyapunov, y tipos de estabilidad con la finalidad de asegurar que los controladores que se propusieron estabilizaran el sistema mecánico propuesto. Con los fundamentos anteriores, se presentó el modelo matemático del sistema Acrobot sobre un carro en un sistema no inercial, y se propusieron dos leyes de control, una basada en MD y otra basada en ST para realizar la tarea de estabilización de postura invertida, y el rechazo de los efectos no inerciales inducidos al acelerarse el sistema acrobot. Los resultados del de simular el modelo matemático del Acrbot sobre un carro en lazo cerrado con las leyes de control propuestas, mostraron que éstas son capaces de estabilizar la postura del mecanismo, y de rechazar los efectos no inerciales, e incertidumbres acotados; todo esto en tiempo finito. .

Bibliografía

- [1] Adhikary, N. and Mahanta, C. (2013). Integral backstepping sliding mode control for underactuated systems: Swing-up and stabilization of the cart–pendulum system. *ISA transactions*, 52(6):870–880. [3](#)
- [2] Arnol'd, V. I. (2013). *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer Science & Business Media. [16](#)
- [3] Arya, A. (2000). Introduction to classical mechanics. [15](#)
- [4] Åström, K. J. and Furuta, K. (2000). Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36(2):287–295. [16](#)
- [5] DeJong, G. (1999). Ai can rival control theory for goal achievement in a challenging dynamical system. *Computational Intelligence*, 15(4):333–366. [16](#)
- [6] From, P. J., Gravdahl, J. T., and Pettersen, K. Y. (2016). *Vehicle-manipulator systems*. Springer. [2](#), [3](#)
- [7] Graichen, K., Treuer, M., and Zeitz, M. (2007). Swing-up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation. *Automatica*, 43(1):63–71. [3](#)
- [8] Hauser, J. and Murray, R. M. (1990). Nonlinear controllers for non-integrable systems: The acrobot example. In *American Control Conference, 1990*, pages 669–671. IEEE. [3](#)
- [9] Jankovic, M., Fontaine, D., and Kokotović, P. V. (1996). Tora example: Cascade- and passivity-based control designs. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(3):292–297. [2](#)
- [10] Jeffrey, A. and Teodorescu, P. P. (2009). Mechanical systems, classical models. [2](#), [3](#)
- [11] Kelly, R. and Santibáñez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson educación. [16](#)

- [12] Khalil, H. K. (1996). Nonlinear systems. *Prentice-Hall, New Jersey*, 2(5):5–1. [30](#)
- [13] Lee, S.-G. et al. (2013). Sliding mode controls of double-pendulum crane systems. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27(6):1863–1873. [3](#)
- [14] Levant, A. (2003a). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, 76(9-10):924–941. [35](#)
- [15] Levant, A. (2003b). Introduction to high-order sliding modes. *School of Mathematical Sciences, Israel*, 58(6):1. [34](#)
- [16] Levant, A. (2007). Principles of 2-sliding mode design. *automatica*, 43(4):576–586. [36](#)
- [17] Moreno, J. A. and Osorio, M. (2008). A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 2856–2861. IEEE. [51](#), [52](#)
- [18] Mori, S., Nishihara, H., and Furuta, K. (1976). Control of unstable mechanical system control of pendulum. *International Journal of Control*, 23(5):673–692. [2](#)
- [19] Olfati-Saber, R. (2001). *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology. [15](#), [42](#)
- [20] Rubi, J., Rubio, A., and Avello, A. (2002). Swing-up control problem for a self-erecting double inverted pendulum. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 149(2):169–175. [3](#)
- [21] Serrano-Heredia, J., Loukianov, A. G., and Bayro-Corrochano, E. (2011). Sliding mode block control regulation of the pendubot. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 8249–8254. IEEE. [3](#)
- [22] Shiriaev, A., Kolesnichenko, O., and Paramonov, L. (2002). How to redistribute energy between different links of the pendubot. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):545–550. [17](#)
- [23] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding mode control and observation*, volume 10. Springer. [3](#), [27](#), [33](#), [36](#), [48](#)
- [24] Spong, M. W. (1998). Underactuated mechanical systems. In *Control problems in robotics and automation*, pages 135–150. Springer. [16](#)
- [25] Spong, M. W. and Block, D. J. (1995). The pendubot: A mechatronic system for control research and education. In *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*, volume 1, pages 555–556. IEEE. [3](#)

- [26] Tedrake, R. (2009). Underactuated robotics: Learning, planning, and control for efficient and agile machines course notes for mit 6.832. *Working draft edition*, page 3. [16](#)
- [27] Timmermann, J., Khatab, S., Ober-Blöbaum, S., and Trächtler, A. (2011). Discrete mechanics and optimal control and its application to a double pendulum on a cart. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):10199–10206. [19](#)
- [28] Utkin, V. (1977). Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic control*, 22(2):212–222. [28](#)
- [29] Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (2009). *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. CRC press. [24](#)
- [30] Utkin, V. and Lee, H. (2006). Chattering problem in sliding mode control systems. In *Variable Structure Systems, 2006. VSS'06. International Workshop on*, pages 346–350. IEEE. [30](#)
- [31] Utkin, V. I. (1993). Sliding mode control design principles and applications to electric drives. *IEEE transactions on industrial electronics*, 40(1):23–36. [3](#), [23](#), [24](#)
- [32] Utkin, V. I. (2013). *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media. [24](#)
- [33] Vidyasagar, M. (2002). *Nonlinear systems analysis*, volume 42. Siam. [30](#)
- [34] Wei, Q., Dayawansa, W. P., and Levine, W. S. (1995). Nonlinear controller for an inverted pendulum having restricted travel. *Automatica*, 31(6):841–850. [16](#)
- [35] Xu, R. and Özgüner, Ü. (2008). Sliding mode control of a class of underactuated systems. *Automatica*, 44(1):233–241. [3](#)
- [36] Zikmund, J., Celikovsky, S., and Moog, C. H. (2007). Nonlinear control design for the acrobot. *IFAC Proceedings Volumes*, 40(20):446–451. [17](#)

Anexo

Resultados obtenidos

- Se publicó un artículo a 2018 15th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2018) con el título **Robust Control for Stabilization of Non-Inertial System: Pendulum-Acrobot**, autores: Daniel I. Arevalo y Hussain Alazki, CINVESTAV, Ciudad de México.
- Se envió un artículo a ISA TRANSACTIONS: The Journal of Automation, con el título **Pendulum-Acrobot Stabilization In a Non-Inertial System: using a Sliding Modes Control**, autores: Daniel I. Arevalo, Hussain Alazki y Alexander S. Poznyak. Actualmente está en proceso de revisión.

Robust Control for Stabilization of Non-Inertial System: Pendulum-Acrobot

Daniel I. Arevalo
*Mechatronics department,
Engineering Faculty,
Universidad Autónoma del Carmen,
Ciudad del Carmen, Campeche, Mexico*
E-mail: daniel93arevalo@gmail.com

Hussain Alazki
*Mechatronics department,
Engineering Faculty,
Universidad Autónoma del Carmen,
Ciudad del Carmen, Campeche, Mexico*
E-mail: halazki@pampano.unacar.mx

Abstract—In this work, a robust control strategy is proposed to achieve attitude stabilization of a non-inertial Pendulum-Acrobot system. Modeling of this system will be presented through the classical Euler-Lagrange method and a robust controller design based on the Super-Twisting algorithm in order to stabilize the acrobot position under a non-inertial framework. Finally, the implementation of the proposed control design scheme is carried out by numerical simulation.

Index Terms—Pendulum-Acrobot, Non-Inertial System, Robust Control.

I. INTRODUCTION

The inverted pendulum is a classical non-linear system, studied in control and robotics research, due to its well-known natural unstable response. This mechanism presents many variants that add complexity to its physical behavior, and therefore offer a great challenge for applying control strategies. The physical response of these systems, when coupled to non-inertial frameworks [1, 2], is affected by dynamics that would not be present in a fixed reference system. These non-inertial effects include reaction forces and relative motions which can potentially alter the performance of an overall system, in such way that these effects must be taken into account when designing a control strategy.

Among pendulum-like mechanisms, a variant that have been widely studied in control system research is The Cart-Pole system; it is constituted by a simple inverted pendulum that rotates freely while mounted on an actuated cart [3]. A similar system, is the Translational Oscillator Rotational Actuator (TORA); this mechanical system consists of a damped oscillating platform with a rotating eccentric mass attached to it [4]. Some other challenging pendulum systems are the double pendulum variants, these include, The Pendubot, The Acrobot, and Double Pendulum mounted on a cart. These systems are planar rotational mechanisms; the first one resembles of a human arm since the input torque comes from its first joint or shoulder while the second joint or elbow rotates freely [5]; and the second one is similar to a human gymnastic on parallel bars, given that the input torque is provided by the second joint or waist while the first joint (toehold) rotates freely[6]. The double pendulum on a cart, on the other hand,

consists of a non-actuated two-link mechanism attached to an actuated mobile platform [7]. All of these mechanical systems can be studied from a non-inertial framework [1, 2, 8], since a particular mobile component(cart or link) can be taken as an accelerated framework (non-inertial), and thus its effects can be modeled.

Typically, some of the control methods applied to the aforementioned systems are focused on achieving swing-up and balancing task; however, modeling uncertainties, disturbances, and non-inertial effects should also be taken into account since they can cause certain control systems to fail. For this reason, a robust control approach is more suitable when dealing with such undesired effects. Within this classification of robust control, the Sliding Modes Control (SMC) is found. This strategy offers useful features such as insensitivity to parasitic dynamics, external/internal bounded disturbances, high accuracy, reduced-order dynamics of the compensated system, and Finite-time convergence [9]. Some research works on Sliding Modes Control have exploited these particular features in order to develop control strategies for pendulum-like systems. For example, a backstepping SMC strategy was presented in [10] for the swing up and stabilization of a Cart-Pole system which also dealt with added disturbances rejection and reduction of chattering. A case for the TORA system is presented in [11], where a controller based on SMC for global stabilization is proposed. Besides, a robust control for double pendulums system is proposed in [12] for reference tracking sliding mode regulator and the one proposed in [13] where they presented a double pendulum crane system; which is a double pendulum on a cart with no actuators at the joints and not inverted. The control tasks this in the latter system are swing-up and balancing of a payload. Despite the SMC features, chattering oscillations remains a problem for SMC implementation; nevertheless this can be reduced by a Twisting or Super-Twisting SMC approach.

In the described systems, the non-inertial effects are induced by mobile components that accelerate the whole systems, such as sliding platforms or carts, and swinging links. Moreover, the control input is applied on this mobile platform; for example, in the Cart-Pole and Double Pendulum on a Cart systems, the carts perform the control action. In this sense,

Pendulum-Acrobot Stabilization In a Non-Inertial System: using a Sliding Modes Control

Hussain Alazki^a, Daniel I. Arevalo^a, Alexander S. Poznyak^b

^a*Mechatronics department, Engineering Faculty, UNACAR, Ciudad del Carmen, Campeche, Mexico (e-mail: daniel93arevalo@gmail.com, halazki@pampano.unacar.mx).*

^b*Automatic Control Department, CINVESTAV-IPN, A.P. 14-740, C.P. 07360 D.F, Mexico (e-mail: apoznyak@ctrl.cinvestav.mx).*

Abstract

This paper deals with mathematical modeling of the nonlinear system of an acrobot on a cart. Here we apply the Sliding Mode Approach which turns out to be very effective in the considered situation when we don't know exactly some functions, participating in the right-hand side of the obtained mechanical model. In this case, any other approaches are practically unimplementable. The suggested control strategy, based on this approach, is intended to attitude stability under uncertainties of the acrobot's angular positions while displacing on a car. Finally, the effective implementation of the proposed control scheme is illustrated by numerical simulation.

Keywords:

Nonlinear System, Non-inertial System, Sliding Modes.

1. Introduction

One of the most studied nonlinear underactuated systems in robotics and automatic control is the inverted pendulum. This mechanism is a classic case of intrinsic unstable response and has been used to test a wide variety of control strategies. The inverted pendulums offer many pendulum-like configurations that present a big challenge when performing a particular control task. In this sense, interesting effects are added to pendulum systems when placed on non-inertial frameworks. These non-inertial effects are generated when physical systems are coupled to accelerated frameworks. Whence, reaction forces appear while in fixed-framework systems are not present.



UNACAR

Universidad Autónoma del Carmen
"Por la Grandeza de México"

ACUERDO PARA USO DE OBRA

A quien corresponda

PRESENTE

Por medio del presente escrito, **Daniel Iván Arévalo Carrillo** (en lo sucesivo EL AUTOR) hace constar que es titular intelectual de la obra denominada, "**Control de Modo Deslizante para un Péndulo tipo Acrobot sobre un carro**" (en lo sucesivo la OBRA), en virtud de lo cual autoriza a la Universidad Autónoma del Carmen (en lo sucesivo la UNACAR) para que efectúe resguardo físico y/o electrónico mediante copia digital o impresa para asegurar su disponibilidad, divulgación, comunicación pública, distribución, transmisión, reproducción, así como digitalización de la misma con fines académicos y sin fines de lucro como parte de Repositorio Institucional de la UNACAR (*Runacar*).

De igual manera, es deseo del AUTOR establecer que esta autorización es voluntaria y gratuita, y que de acuerdo a lo señalado en la Ley Federal del Derecho de Autor y la Ley de Propiedad Industrial, la UNACAR cuenta con mi autorización para la utilización de la información antes señalada, estableciendo que se utilizará única y exclusivamente para los fines antes señalados. EL AUTOR autoriza a la UNACAR a utilizar las obras en los términos y condiciones aquí expresados, sin que ello implique que se le conceda licencia o autorización alguna o algún tipo de derecho distinto al mencionado respecto a la "propiedad intelectual" de la misma OBRA; incluyendo todo tipo de derechos patrimoniales sobre obras y creaciones protegidas por derechos de autor y demás formas de propiedad intelectual reconocida o que lleguen a reconocer las leyes correspondientes. Al reutilizar, reproducir, transmitir y/o distribuir la OBRA se deberá reconocer y dar crédito de autoría de la obra intelectual en los términos especificados por el propio AUTOR, y el no hacerlo implica el término de uso de esta licencia para los fines estipulados. Nada de esta licencia menoscaba o restringe los derechos patrimoniales y morales del AUTOR.

De la misma manera, se hace manifiesto que el contenido académico, literario, la edición y en general de cualquier parte de la OBRA son responsabilidad del AUTOR, por lo que se deslinda a la UNACAR por cualquier violación a los derechos de autor y/o propiedad intelectual, así como cualquier responsabilidad relacionada con la misma frente a terceros. Finalmente, el AUTOR manifiesta que estará depositando la versión final de su Tesis de maestría, OBRA y cuenta con los derechos morales y patrimoniales correspondientes para otorgar la presente autorización de uso.

En la ciudad de Carmen, del estado de Campeche a los 01_ días el mes de octubre de 2018.

Atentamente,

DANIEL IVÁN ARÉVALO CARRILLO

Nombre y Firma Autógrafa de EL AUTOR

Escriba la Facultad, Escuela, Centro a la que está suscrita la obra: Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma del Carmen, Campus III.