



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL CARMEN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

---



# **TESIS**

## **"CONTROL ADAPTABLE POR MODOS DESLIZANTES PARA UN ACROBOT SOBRE UN CARRO"**

PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA MECATRÓNICA

PRESENTA:

**LAURA ELENA TREJO SOSA**

**CIUDAD DEL CARMEN, CAMPECHE, NOV. DE 2019**



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL CARMEN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

---



# **TESIS**

## **“CONTROL ADAPTABLE POR MODOS DESLIZANTES PARA UN ACROBOT SOBRE UN CARRO”**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA MECATRÓNICA

PRESENTA:

**LAURA ELENA TREJO SOSA**

DIRECTOR DE TESIS  
**DR. HUSSAIN ALAZKI**

CO-DIRECTOR DE TESIS  
**DR. VICTOR GOLIKOV**

**CIUDAD DEL CARMEN, CAMPECHE, NOV. 2019**

# Dedicatoria

A mis padres por darme lo mejor que un padre puede dejarle a un hijo, Educación.  
Y a ti hijo,  
te dedico mis esfuerzos y añoro lo mejor para tu vida, te amo mi amor.



# Agradecimientos

## **Gracias a la vida:**

Por darme el privilegio de pertenecer a una familia que me procura, me enseña y me guía. No tendría nada, sino los tuviera a ellos.

## **Gracias a mis Padres, el Ing. Jorge Esteban Trejo Rivera y a la Lic. Laura Elena Sosa Rivera:**

Gracias a ambos, por todo, y aunque a veces con palabras no puede expresarse todo lo que el corazón siente quiero que sepan que son el pilar fundamental de mi vida y sé que no pagaré jamás toda la educación, apoyo y amor que me han brindado (y me siguen brindando), pero es importante hacerles saber que soy quien soy, por ustedes. Gracias por enseñarme que pese a los retos que la vida, o incluso yo me ponga, puedo con eso y más. Pero sobre todo, gracias, mil gracias, por guiarme a ser la mamá que mi hijo necesita. Los amo.

## **Gracias hijo:**

Gracias por motivarme a no desistir, a pesar de que aún eres un bebé, mi bebé. Te amo como no tienes una idea, y espero que los sacrificios, y lo que hoy hago rindan fruto para nosotros, pero en especial para ti mi amor. Espero ser un ejemplo y una guía en tu vida, para que cada paso que des te lleve a ser un hombre con educación, que no tenga miedo a seguir sus ideales y que por sobre todo puedas superar cada reto que la vida tenga preparado para ti. Te amo hijo, y quiero que sepas que siempre que me necesites, estaré para ti, en las buenas, en las malas y en las peores.

## **A mis hermanos:**

Lic. Patricia Escarleth y a mi futuro Lic. Jorge Esteban, por estar presentes siempre, por sus consejos e incluso por las lecciones que me dan aun siendo un par de años menores. Espero que esto les sirva como motivación para seguir creciendo profesionalmente, y no olviden que siempre se puede seguir aprendiendo y la clave es querer aprender. Los amo y por sobre todo estoy y estaré para ustedes. No se rindan y den lo mejor de ustedes.

## **A mi abuelita y mi tío Gerardo:**

Gracias por demostrarme su amor incondicional aún en la distancia, por hacerme sentir especial y aconsejarme siempre que lo necesito. Les agradezco sus cuidados,

sus enseñanzas y las lecciones de vida que a diario me dan. Gracias abuelita por amarme tal cual soy y a mi tío por ser como mi segundo padre. Les agradezco escucharme, apoyarme, guiarme y sobre todo por decirme que no hay reto imposible.

**Al Dr. Hussain Alazki:**

No tengo palabras para agradecerle el dejarme trabajar con usted desde mi Servicio Social hasta ahora en la Maestría. Gracias por ser como un hermano mayor, padre y amigo, gracias por sus consejos e incluso por los regaños, porque sé que lo hace para que yo siga mejorando y aprendiendo. Me llena de orgullo saber que todo este tiempo he trabajado con alguien como usted, porque más que un profesor, es un guía para sus alumnos...y por tanto.

**A mis amigos y Familia:**

Gracias a mis amigos, a los chicos de servicio, a los chicos de Tesis, a mis amigos de Maestría, a las secretarías, a mi Familia en Poza Rica, a mis compañeros, a mis profesores a lo largo de mi carrera universitaria y a los de la Maestría, gracias a todos porque indirecta o directamente han ayudado a culminar este trabajo, por sus palabras, su disponibilidad, y por estar en mi vida. Gracias a todos.

**Gracias UNACAR:**

Gracias a la máxima casa de estudios, la Universidad Autónoma del Carmen (UNACAR) por darme las herramientas para prepararme y enfrentarme a la vida como profesionista. Gracias por todas las oportunidades que me han dado, y por el apoyo para la realización de actividades fuera y dentro de la universidad, así como viajes.

**Ing. Laura Elena Trejo Sosa.**

# Resumen

---

El péndulo Acrobot sobre un carro es un mecanismo que consiste en dos eslabones unidos mediante un actuador, el cual recibe su nombre debido a que su comportamiento asemeja a un acróbata de barras paralelas, el cual exhibe una dinámica interesante para el desarrollo de estrategias de control.

El objetivo de este trabajo es diseñar una estrategia adaptable usando la Segunda ley de Control Adaptable por Modos Deslizantes (ASMC, por sus siglas inglés) que permite obtener una ganancia dinámica con respecto a efectos no deseados para alcanzar la postura de estabilización del Acrobot sobre un carro en un marco referencial no inercial con una aceleración externa incluida por el carro, utilizando el modelo matemático del sistema a través del método clásico de Euler-Lagrange. La validación del algoritmo de control se realiza mediante dos simulaciones numéricas en la plataforma MATLAB®/Simulink, la primera entre el ASMC-Primera Ley y un control PID, y la segunda, el ASMC-Segunda Ley contra un Control por Modos Deslizantes, en ambos casos asegurando su efectividad frente a otro control.





# Abstract

---

The Acrobot pendulum on a car is a mechanism that consists of two links joined by an actuator, which receives its name because its behavior resembles an acrobat of parallel bars, which exhibits an interesting dynamic for the development of strategies of control.

The aim in this work, is to design an adaptive strategy using the Second Adaptive Sliding Mode Control Law (ASMC, for its acronym in english) that allows us to get an adequate dynamical gain with respect to undesired effects to achieve attitude stabilization of the Acrobot on a cart in an non-inertial framework, with an external acceleration induced by the cart, using the mathematical modeling through the classical method of Euler-Lagrange equations. Algorithm validation is done by numerical simulation, in the platform MATLAB®/Simulink, the first one between an ASMC-1st Law and a Control PID, and the second one, the ASMC-2nd Law against a Sliding Modes Control, in both ensuring its effectiveness against another control.



# Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
Índice General	IX
Lista de Acrónimos	XI
Lista de Símbolos	XIII
Índice de Figuras	XV
Índice de Tablas	XVII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.2.1. Objetivo general . . . . .	2
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	2
1.3. Estado del Arte . . . . .	3
1.4. Problemática . . . . .	6
1.5. Contribución . . . . .	6
1.6. Organización de la tesis . . . . .	6
<b>2. Modelado de sistemas mecánicos</b>	<b>7</b>
2.1. Fundamentos para el modelado de sistemas mecánicos . . . . .	7
2.1.1. Leyes de Newton . . . . .	7
2.1.2. Propiedades del Centro Inercial . . . . .	10
2.1.3. Teorema de Steiner . . . . .	11
2.1.4. Sistemas no inerciales . . . . .	11
2.2. Ecuaciones dinámicas de Lagrange . . . . .	14
2.3. Sistemas Mecánicos Tipo Péndulo . . . . .	15
2.3.1. Péndulo-Carro . . . . .	15
2.3.2. Doble Péndulo . . . . .	16
2.3.3. Péndulo doble sobre un carro . . . . .	17

<b>3. Control Adaptable por Modos Deslizantes</b>	<b>21</b>
3.1. Antecedentes . . . . .	21
3.2. Control por Modos Deslizantes . . . . .	23
3.2.1. Solución de Filipov . . . . .	25
3.2.2. Efecto chattering . . . . .	28
3.3. Estabilidad de Lyapunov . . . . .	28
3.3.1. Método directo de Lyapunov . . . . .	29
3.3.2. Descripción del sistema, principales suposiciones y restricciones.	30
3.3.3. Modos Deslizantes Real e Ideal . . . . .	31
3.4. Primera ley de Control Adaptable por Modos Deslizantes . . . . .	32
3.5. Segunda Ley de Control Adaptable por Modos Deslizantes. . . . .	33
3.5.1. Análisis de Estabilidad para la ley Adaptable . . . . .	37
<b>4. Formulación del Problema</b>	<b>39</b>
4.1. Acrobot sobre un carro en un marco referencial no inercial . . . . .	39
4.1.1. Modelo dinámico: ecuaciones de energía y ecuaciones de La-	
grange. . . . .	39
4.1.2. Espacio de estados del sistema Acrobot sobre un carro. . . . .	45
4.2. Control adaptable . . . . .	47
<b>5. Resultados de Simulación</b>	<b>51</b>
5.1. Comparación de ASMC-Primera ley contra el Control PID . . . . .	51
5.2. Comparación del ASMC-Segunda ley contra el CMD . . . . .	59
<b>Conclusión General</b>	<b>67</b>
<b>Trabajos futuros</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>74</b>
<b>Anexo: Resultados publicados</b>	<b>75</b>

# Lista de Acrónimos

---

MD	Modos Deslizantes (Sliding Modes).
ST	Súper Torsión (Super-Twisting).
CMD	Control por Modos Deslizantes (Sliding Modes Control).
TORA	Oscilador Traslacional-Actuador Rotacional (Traslational Oscillator-Rotational Actuator).
VSS	Sistemas de Estructura Variable (Variable System Structures).
ASMC	Control Adaptable por Modos Deslizantes (Adaptive Sliding Modes Control).
CI	Centro Inercial (Inertial Center).



# Lista de Símbolos

---

$\mathcal{S}$	Sistema de puntos materiales.
$\mathcal{O}$	Origen del sistema coordenado.
$\mathcal{O}'$	Origen del sistema coordenado relativo.
$m_i$	Masa de una partícula.
$\vec{r}_i$	Vector de posición de una partícula.
$\vec{v}_i$	Vector de velocidad de una partícula.
$\psi$	Polo de un sistema de partículas.
$\vec{\psi}_i$	Vector de posición del polo.
$E_c$	Energía cinética.
$\vec{p}$	Impulso o cantidad de movimiento.
$\vec{j}$	Momento de impulso.
$\vec{f}$	Fuerza vectorial.
$m$	Masa de un cuerpo rígido.
$\vec{r}_{CI}$	Vector de posición del Centro de inercia.
$\vec{v}_{CI}$	Velocidad del Centro de inercia.
$\vec{v}_{\mathcal{O}}$	Velocidad absoluta.
$\vec{v}_{\mathcal{O},CI}$	Velocidad relativa del centro de inercia.
$d_i$	Distancia entre dos puntos.
$I_{\vec{w}}$	Momento de inercia con respecto de un eje.
$\vec{\omega}$	Velocidad angular.
$\vec{\epsilon}$	Aceleración angular.
$\vec{w}$	Aceleración traslacional.
$\mathcal{L}$	Función de Lagrange.
$q$	Coordenadas generalizadas.

$E_p$	Energía potencial.
$M$	Matriz de inercia.
$C$	Matriz de Coriolis.
$G$	Vector de gravedad.
$l_{ci}$	Distancia de un pivote al centro de inercia de eslabones de un péndulo.
$L_i$	Longitud de eslabones de un péndulo.
$g$	Aceleración gravitatoria.
$u$	Entrada de control.
$K$	Ganancia de controlador.
$s$	Superficie de deslizamiento.
$S$	Variables de deslizamiento cuando $s = 0$ .
$V$	Función de Lyapunov.
$t_r$	Tiempo de alcance.
$\varphi$	Efecto no deseado.
$\mathbb{I}_i$	Tensor de inercia.
$\theta_i$	Desplazamiento angular.
$\tau_i$	Fuerzas generalizadas/entradas de un sistema.
$\mathbf{e}$	Vector unitario.
$\delta_i$	Efecto no inercial.
$e_i$	Error de posición.



# Índice de figuras

1.1.	Sistemas tipo péndulo móviles. . . . .	4
1.2.	Péndulos dobles. . . . .	4
1.3.	Péndulo doble sobre un carro. . . . .	5
2.1.	Un conjunto de puntos materiales referidos a un sistema coordinado. . . . .	8
2.2.	Relación entre el polo $\psi$ y el origen $\mathcal{O}$ . . . . .	8
2.3.	Relación entre el sistema absoluto y el auxiliar. . . . .	10
2.4.	Cuerpo plano rotando en su plano respecto del pivote $\mathcal{O}$ . . . . .	12
2.5.	Sólido rotando alrededor de un eje que no pasa por su centro inercial. . . . .	12
2.6.	Diagrama de distancias a los ejes $\mathcal{OO}'$ y $\psi\psi'$ de un punto $i \in \mathcal{S}$ . . . . .	12
2.7.	Sistema Péndulo-Carro. . . . .	15
2.8.	Doble péndulo. . . . .	16
2.9.	Péndulo doble sobre un carro. . . . .	18
3.1.	Modos Deslizantes de un sistema tipo relé. . . . .	24
3.2.	Plano de estados $(\dot{y}, y)$ de dos sistemas inestables. . . . .	24
3.3.	Plano de estados de un VSS. . . . .	24
3.4.	Implementación de alta ganancia en modos deslizantes. . . . .	25
3.5.	Modos Deslizantes por Filipov. . . . .	26
3.6.	Función Signo. . . . .	27
3.7.	Modos deslizantes. . . . .	27
3.8.	Esquema descriptivo del comportamiento de $\sigma$ (arriba) y $K$ (abajo) contra el tiempo. . . . .	34
4.1.	Acrobot sobre un carro en un marco referencial no inercial. . . . .	40
4.2.	Eslabón 1 del Acrobot. . . . .	42
4.3.	Eslabón 2 del Acrobot. . . . .	43
5.1.	Modelo de Matlab-Simulink del Acrobot sobre un carro. . . . .	53
5.2.	Respuesta del estado $x_1$ con ASMC-Primera Ley del Acrobot sobre un carro. . . . .	54
5.3.	Respuesta del estado $x_2$ con ASMC-Primera Ley del Acrobot sobre un carro. . . . .	54
5.4.	Respuesta de los estados $x_3$ y $x_4$ con el ASMC-Primera Ley del Acrobot sobre un carro. . . . .	55
5.5.	Respuesta del error de los estados $x_1$ y $x_2$ con ASMC-Primera Ley del Acrobot sobre un carro. . . . .	55
5.6.	Respuesta de la señal del control ASMC-Primera Ley del Acrobot sobre un carro. . . . .	56

5.7. Respuesta de los estados del Acrobot sobre un carro con el control PID.	56
5.8. Respuesta del error de los estados $x_1$ y $x_2$ con el control PID del Acrobot sobre un carro. . . . .	57
5.9. Respuesta de la señal del control PID del Acrobot sobre un carro. . . . .	57
5.10. Comparación de la respuesta del estado $x_1$ aplicando el ASMC-Primera Ley y el control PID al péndulo Acrobot sobre un carro. . . . .	58
5.11. Comparación de la respuesta del estado $x_2$ aplicando el ASMC-Primera Ley y el control PID al péndulo Acrobot sobre un carro. . . . .	58
5.12. Posición angular del estado $x_1$ : Eslabón 1. . . . .	60
5.13. Error de posición del estado $x_1$ del Acrobot sobre un carro: Eslabón 1. . . . .	60
5.14. Posición angular del estado $x_2$ : Eslabón 2 . . . . .	61
5.15. Error de posición del estado $x_2$ del Acrobot sobre un carro: Eslabón 2. . . . .	61
5.16. Velocidades angulares de los estados $x_3$ y $x_4$ . . . . .	61
5.17. Comparación del estado $x_1$ : CMD contra el ASMC. . . . .	62
5.18. Comparación del estado $x_2$ : CMD vs ASMC. . . . .	62
5.19. Error de posición del estado $x_1$ . . . . .	63
5.20. Error de posición del estado $x_2$ . . . . .	63
5.21. Respuesta de las señales de control del ASMC-Segunda Ley y el CMD.	63
5.22. Comportamiento de la ganancia $k(t)$ con el ASMC-Segunda Ley. . . . .	64

# Índice de tablas

1.1. Configuración de los péndulos. . . . .	3
4.1. Parámetros del sistema Acrobot. . . . .	41
5.1. Parámetros para la simulación del Péndulo Acrobot sobre un carro del ASMC-Primera ley y el control PID. . . . .	53
5.2. Parámetros de simulación del CMD y el ASMC-Segunda Ley para el Acrobot sobre un carro. . . . .	59
5.3. RMSE del control PID, el ASMC-Primera Ley, el CMD y el ASMC-Segunda Ley. . . . .	64



# Capítulo 1

## Introducción

Los péndulos son sistemas mecánicos ampliamente estudiados en las áreas de robótica y teoría de control, principalmente porque la mayoría de los mecanismos con múltiples eslabones o robots manipuladores pueden verse como diversas configuraciones de péndulos acoplados. Por este motivo, el estudio de esta clase de sistemas se orienta al diseño de técnicas de control que a partir de su dinámica, puedan realizar una tarea de control de manera eficiente. Uno de los sistemas de péndulo más usado y estudiado en teoría de control, desde los años cincuenta, es el péndulo invertido, el cual se utiliza para probar técnicas de control lineal y no lineal para la estabilización de sistemas inestables. Este mecanismo, en su configuración invertida, puede presentarse como un péndulo simple o como un péndulo montado sobre un carro, y consiste en una barra unida a un pivote fijo o a un pivote móvil, respectivamente. La experimentación con péndulos se debe principalmente a las características no-lineales que exhibe su comportamiento, además, el péndulo puede presentarse en diversas configuraciones.

A su vez, el péndulo doble puede ser presentarse en dos configuraciones; como Pendubot o como Acrobot. El Acrobot es un brazo robótico planar de dos uniones de revoluta, con un actuador en el codo, pero sin actuador en el hombro, el cual recibe su nombre debido a que asemeja a un acróbata de barras paralelas, obteniendo el impulso para columpiarse de su cadera. El estudio de este tipo de sistemas (péndulos dobles), es muy importante en el área de robótica debido a su similitud con extremidades como los brazos y las piernas humanas, y que tienen aplicación tanto en robots caminantes como en brazos manipuladores.

De modo que, al ser un péndulo acoplado, exhibe una dinámica interesante para el desarrollo de estrategias de control. Por lo que, en este sentido, durante la formulación matemática de dichas estrategias, no sólo se debe tomar en cuenta la dinámica propia del sistema, sino también perturbaciones externas, inexactitudes matemáticas o efectos inerciales. Éste último efecto ocurre cuando un sistema físico no está fijo a una base o superficie, o la superficie en la que está montado es móvil, por lo que su marco de referencia está acelerado; en tal caso se le conoce como marco de referencia no inercial. Estos efectos se representan como reacciones al movimiento no inercial que experimenta un sistema físico y puede llegar a causar inestabilidad al punto de provocar que un algoritmo de control falle o incluso que una entrada de control se vea afectada. Un área de control que presenta una posible alternativa para lidiar

con dinámicas no deseadas en sistemas mecánicos como el Acrobot, es el Control Robusto, el cual puede llegar a rechazar dinámicas y perturbaciones desconocidas de un sistema y/o planta. Dentro de esta sub-rama, se encuentra el método de Control por MD (Modos Deslizantes) y ASMC (Control Adaptable por Modos Deslizantes), los cuales alteran la dinámica de un sistema no lineal mediante la aplicación de una señal de control discontinua que obliga al sistema a “deslizarse” hasta alcanzar algún punto de estabilidad. Estos métodos ofrecen una gran capacidad para el desarrollo de algoritmos de control en sistemas no lineales como los péndulos. Así pues, las tareas de control más habituales para el Acrobot son el problema de balanceo y de postura. En la primera tarea se busca hacer columpiar al Acrobot para que alcance su posición invertida, mientras que para la tarea de postura, se requiere estabilizar al Acrobot en un punto de equilibrio inestable. En el presente trabajo se abordará el estudio del péndulo Acrobot montado sobre un carro en un marco de referencia no inercial para su estabilización en su posición invertida por medio de la técnica de control robusta ASMC-Segunda Ley, así como una comparación en simulación con el control PID y otra con el control MD.

## 1.1. Motivación

Existen trabajos de investigación sobre casos de estudio acerca del péndulo Acrobot montado sobre un carro, en donde la acción de control es transmitida a través del carro para estabilizar al péndulo que se encuentra sobre éste, sin embargo, en la literatura aún no se ha abordado el caso en donde el péndulo se encuentre bajo los efectos de una dinámica no inercial en un marco de referencia acelerado. Por lo anterior, la implementación de una técnica de control ASMC para este sistema resulta algo novedoso e interesante, debido a las grandes capacidades de estabilización, rechazo a perturbaciones desconocidas e insensibilidad ante parámetros variables que caracterizan a este tipo de controladores robustos.

## 1.2. Objetivos

A continuación se presentan los objetivos que se pretenden alcanzar a lo largo de la Tesis.

### 1.2.1. Objetivo general

Diseñar una estrategia de control adaptable por modos deslizantes al sistema Acrobot invertido sobre un carro para estabilizar su posición.

### 1.2.2. Objetivos específicos

- Estudiar el modelo del péndulo Acrobot sobre un carro.
- Diseñar el control adaptable por modos deslizantes.
- Estudiar la estabilidad bajo el control adaptable.
- Validar la simulación (Matlab/Simulink<sup>®</sup>).

- Comparar el ASMC-Primera Ley contra PID y ASMC-Segunda Ley contra PID.
- Discusión de Resultados.

### 1.3. Estado del Arte

El péndulo invertido es un sistema no lineal clásico, estudiado en investigación de control y robótica, debido a su conocida respuesta intrínsecamente inestable. Este mecanismo presenta muchas variantes que agregan complejidad a su comportamiento físico y, por lo tanto, ofrecen un gran desafío para aplicar estrategias de control. Existen diversas configuraciones como se aprecia en la Tabla 1.1

Tabla 1.1: Configuración de los péndulos.

<b>Tipo de Péndulos</b>		
Péndulo simple	Péndulo invertido	Péndulo doble
Péndulo Cart-Pole	Péndulo esférico	Péndulo de Furuta
Péndulo montado sobre un carro	Pendubot	Acrobot

La respuesta física de estos sistemas, cuando se encuentran acoplados a marcos de referencia no inerciales [1, 2], se ve afectada por dinámicas que no estarían presentes en un sistema de referencia fijo. Estos efectos no inerciales incluyen fuerzas de reacción y movimientos relativos que pueden alterar el rendimiento global de un sistema de control, de tal forma que estos efectos deben tenerse en cuenta al diseñar una estrategia de control.

Entre los muchos mecanismos tipo péndulo, una variante que ha sido ampliamente estudiada en investigación de sistemas de control es el sistema Carro-Péndulo (ver Fig.1.1a); está constituido por un péndulo simple invertido que gira libremente mientras está montado sobre un carro actuado [3]. Un sistema similar es el Oscilador Rotacional-Traslacional Actuado [4] (TORA por sus siglas en inglés; ver Fig.1.1b); este sistema mecánico consiste en una plataforma oscilante amortiguada con un resorte, que tiene una masa excéntrica gítororia unida a dicha plataforma.

Algunos otros sistemas tipo péndulo que presentan un gran reto para el diseño de estrategias de control son las variantes de doble péndulo, estos incluyen, el Pendubot (ver Fig.1.2a), el Acrobot (ver Fig.1.2b) y el Doble Péndulo montado en un carro (ver Fig.1.3). Estos sistemas son mecanismos con movimientos planares; el primero asemeja a un brazo humano, ya que el torque de entrada proviene de su primera articulación u hombro, mientras que la segunda articulación o codo gira libremente [5]; y el segundo es similar a un gimnasta humano en barras paralelas, dado que el par de entrada es proporcionado por la segunda articulación o cintura, mientras que la primera articulación (punto de apoyo) gira libremente, como se muestra en [6]. Por otra parte, el Péndulo Doble en un carro [7], consiste en un mecanismo de dos eslabones unido a una plataforma móvil actuada. Todos estos sistemas mecánicos se pueden estudiar desde un marco de referencia no inercial [1, 2, 8], ya que un componente móvil particular (carro o enlace) se puede tomar como un marco acelerado

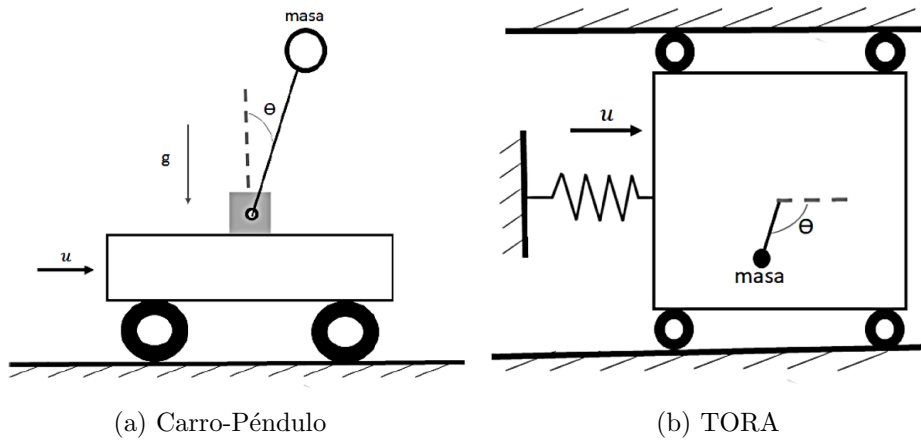


Figura 1.1: Sistemas tipo péndulo móviles.

(no inercial), y por lo tanto sus efectos pueden modelarse.

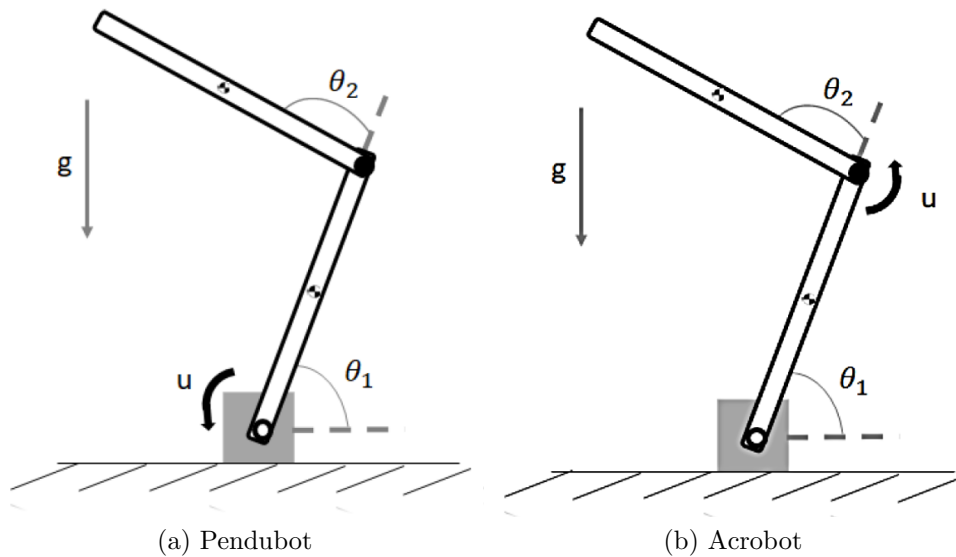


Figura 1.2: Péndulos dobles.

Típicamente, algunos de los métodos de control aplicados a los sistemas antes mencionados se enfocan en lograr las tareas de elevación o balanceo y estabilización de postura. Sin embargo, también deben tenerse en cuenta las incertidumbres, las perturbaciones y los efectos no inerciales del modelado, ya que pueden causar la falla de ciertos sistemas de control. Por esta razón, un enfoque de control robusto es más adecuado cuando se trata de tales efectos no deseados. Dentro de esta clasificación se encuentra el Control por Modos Deslizantes (CMD). Esta estrategia ofrece funciones útiles, como insensibilidad a la dinámica parasítica, perturbaciones externas/internas acotadas, gran precisión, dinámica de orden reducido del sistema compensado y convergencia en tiempo finito [9, 10].

Algunos trabajos de investigación sobre CMD han explotado estas característi-



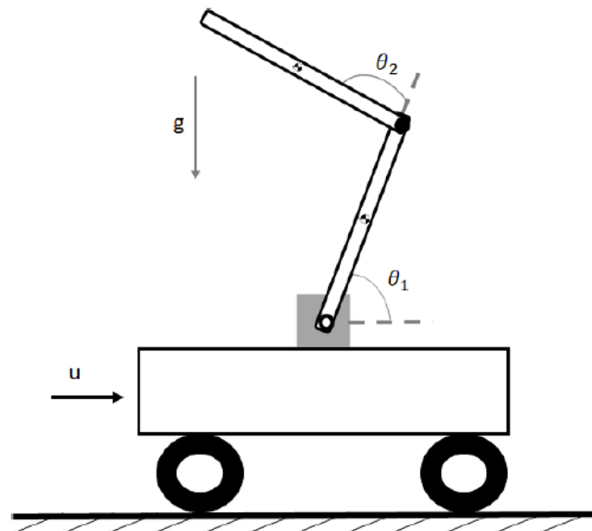


Figura 1.3: Péndulo doble sobre un carro.

cas particulares con el fin de desarrollar estrategias de control para sistemas tipo Péndulo. Por ejemplo, una estrategia de CMD con retro propagación (backstepping en inglés) se presentó en [11] para la elevación y estabilización de un sistema Carro-Péndulo que también lidió con el rechazo de perturbaciones añadidas y la reducción de vibraciones. Por otra parte, el sistema TORA, es presentado en [12], donde se propone un control basado en CMD para estabilización global. Además en [13], se propone un control robusto para el sistema de péndulo doble para seguimiento de trayectorias por MD, así como en [14] donde presentó un sistema de doble péndulo-grúa; que es un péndulo doble en un carro, sin actuadores en las articulaciones y no invertido en donde las tareas de control se basan en la reducción de oscilaciones, así como el equilibrio de una carga útil.

A pesar de las características del CMD, el chattering (oscilaciones de alta frecuencia) sigue siendo un problema para su implementación; sin embargo existen técnicas para reducirlo. Una de esas formas es el uso de capas acotadas: en este caso, algunos enfoques han propuesto un ajuste adecuado de las ganancias [15]. Una segunda manera para decrementar el efecto del chattering es el uso de un controlador MD de orden superior [16–20]. Sin embargo, en ambos casos se requiere el conocimiento de incertidumbres acotadas y como el objetivo es no requerirlas, otra forma consiste en usar un Control Adaptable por Modos Deslizantes, asegurando el objetivo mediante una ganancia de adaptación.

En los sistemas descritos anteriormente, los efectos no inerciales se introducen por componentes móviles que aceleran los sistemas de interés, tales como plataformas o carros deslizantes, o eslabones oscilantes. Además, la entrada de control se aplica generalmente en dicha plataforma móvil; ejemplo de ello son los sistemas Carro-Péndulo y Péndulo Doble sobre un carro en donde los carros realizan la acción de control. En este sentido, el sistema tipo péndulo que se presenta en este trabajo de tesis consiste en un robot Acrobot montado sobre un carro móvil no actuado. Esto cambia la ubicación donde la entrada de control se aplica a la segunda articulación

del péndulo y deja que la plataforma no actuada introduzca efectos no inerciales. De modo que, el Control Adaptable por Modos Deslizantes-Segunda Ley que se propone para este mecanismo, realiza la tarea de estabilización de postura del Acrobot y rechazo de efectos no inerciales cuando el carro esté en movimiento.

## 1.4. Problemática

La tarea de estabilización de postura en el péndulo invertido es un problema clásico y ampliamente estudiado en teoría de control. Para el caso particular del sistema Acrobot sobre un Carro que se propone estudiar, el problema consiste en estabilizar el Acrobot alrededor de su postura invertida mientras este se balancea sobre una plataforma móvil o carro, usando únicamente el par proporcionado por un actuador ubicado en su codo para estabilizarle. Este es un problema especialmente desafiante, ya que se busca no solo la estabilidad, sino la robustez del sistema ante efectos no inerciales.

## 1.5. Contribución

El diseño y la aplicación de técnicas de control para el péndulo invertido sobre carro ha sido ampliamente estudiado, sin embargo, en la literatura aún no se presenta al Acrobot sobre un carro bajo los efectos de una dinámica no inercial en un marco de referencia acelerado, por lo que la implementación del ASMC resulta novedoso gracias a su capacidad de estabilización, rechazo de perturbaciones desconocidas, así como su capacidad de adaptación frente a la presencia de parámetros variables característicos de este tipo de control robusto.

## 1.6. Organización de la tesis

El presente trabajo está dividido en 6 Capítulos, iniciando con una introducción sobre el tema. Esta sección es un pequeño resumen de la estructura que se explicará a detalle en los Capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos del modelado matemático de sistemas mecánicos tipo péndulo en un marco de referencia no inercial, el desarrollo de sus ecuaciones de movimiento a través del método clásico de Lagrange, así como una breve explicación sobre algunos sistemas tipo péndulo existentes.

Después, en el Capítulo 3 se presenta el marco teórico de los fundamentos de la estrategia de control ASMC.

En el Capítulo 4 se desarrolla el método del modelado matemático presentado en el Capítulo 2, para el sistema mecánico del Acrobot sobre un Carro, y se plantean las superficies de deslizamiento para MD y ASMC.

Finalmente, en el Capítulo 5, se muestran los resultados obtenidos en la simulación del sistema Acrobot sobre un carro con el Control Adaptable por Modos Deslizantes-Segunda Ley en lazo cerrado, así como una comparación entre el Control Adaptable por Modos Deslizantes-Primera Ley contra PID y el Control Adaptable por Modos Deslizantes-Segunda Ley contra un CMD.

# Capítulo 2

## Modelado de sistemas mecánicos

Las ecuaciones dinámicas de un sistema mecánico pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. El inconveniente que presenta este método es que el análisis se complica notablemente cuando aumenta el número de articulaciones del mecanismo. En estos casos, es conveniente emplear las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Además muchas relaciones mecánicas en sistemas físicos parten de la suposición de que dichos sistemas no están acelerados. Los sistemas que cumplen con esta condición son conocidos como sistemas de referencia inercial. En este capítulo se analiza el modelado de sistemas físicos por medio del Teorema Köning, las ecuaciones de Lagrange, y además se presenta la descripción de sistemas cuyo marco de referencia sufre una aceleración. Finalmente, se presentan ejemplos de sistemas mecánicos tipo péndulo.

### 2.1. Fundamentos para el modelado de sistemas mecánicos

#### 2.1.1. Leyes de Newton

Supóngase un conjunto de puntos materiales móviles ubicados en el espacio. Ahora dótese a tal espacio de un sistema coordenado con origen en algún punto  $\mathcal{O}$ . La estructura obtenida, denotada  $\mathcal{S}$ , se llama Sistema de puntos inerciales. Para la partícula  $i \in \mathcal{S}$ ,  $m_i$  representa su masa, en tanto que  $\vec{r}_i$  y  $\vec{v}_i$  denotan su vector de posición y su velocidad, respectivamente, de  $\mathcal{O}$ . La Figura 2.1 muestra estos aspectos.

**Definición 2.1** *Un polo es un punto  $\psi$  en el espacio. Si  $\vec{r}_\psi$  es el vector de posición de  $\psi$  respecto a  $\mathcal{O}$ , el vector*

$$\vec{r}_{i,\psi} := \vec{r}_i - \vec{r}_\psi$$

*se conoce como vector de posición (ver Figura 2.2)*

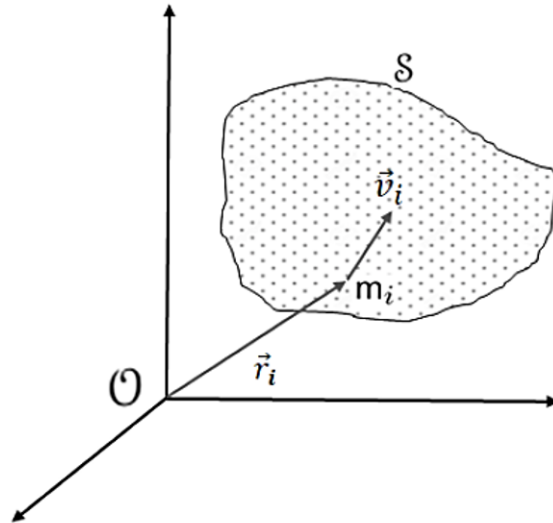


Figura 2.1: Un conjunto de puntos materiales referidos a un sistema coordenado.

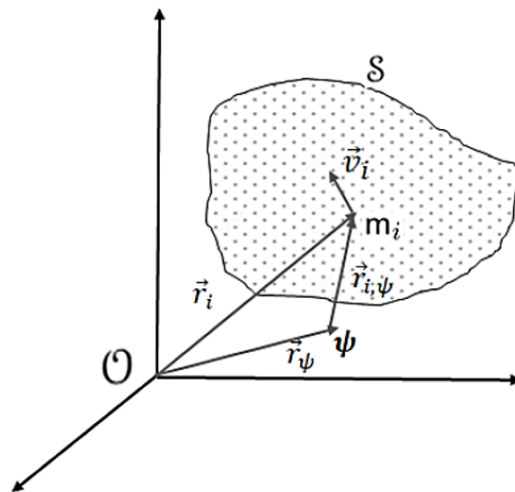


Figura 2.2: Relación entre el polo  $\psi$  y el origen  $\mathcal{O}$ .

**Definición 2.2** *Considérese el sistema de puntos materiales  $\mathcal{S}$ .*

1. *La cantidad escalar*

$$E_c := \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle$$

donde la operación  $\langle *, * \rangle$  denota el producto interno de dos vectores.  $E_c$ , recibe el nombre de energía cinética de un punto material de  $\mathcal{S}$ .

2. *La cantidad vectorial*

$$\vec{p} := \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \vec{v}_i$$

se denomina impulso de un punto material de  $\mathcal{S}$ .

3. La cantidad vectorial

$$\vec{j} := \sum_{i \in \mathcal{S}} [\vec{r}_{i,\psi}, m_i \vec{v}_i]$$

donde la operación  $[\ast, \ast]$  denota el producto vectorial de dos vectores.  $\vec{j}$ , se conoce como momento de impulso de  $\mathcal{S}$  respecto al polo  $\psi$ .

**Axioma 2.1 (Primera Ley de Newton)** Toda partícula material no sujeta a estímulo externo alguno, sólo puede moverse con velocidad rectilínea uniforme o permanecer en reposo.

**Axioma 2.2 (Segunda Ley de Newton)** Denótese con  $\vec{f}_i$  la fuerza ejercida sobre la partícula  $i \in \mathcal{S}$  y sea

$$\begin{aligned} \vec{f} &:= \sum_{i \in \mathcal{S}} \vec{f}_i \\ \vec{f} &= \dot{\vec{p}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

**Axioma 2.3 (Tercera Ley de Newton)** Dados  $i, j \in \mathcal{S}$  denótese por  $\vec{f}_{ij}$  la fuerza ejercida sobre  $i$  por  $j$ . Entonces

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

La cantidad  $\vec{f}$  es la fuerza total sobre el sistema  $\mathcal{S}$  y puede representarse como

$$\vec{f} = -\vec{f}_{int} + \vec{f}_{ext}$$

donde  $\vec{f}_{ext}$  es la fuerza ejercida sobre  $\mathcal{S}$  por agentes externos y

$$\vec{f}_{int} = \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij}, \quad i \neq j$$

es la fuerza neta que resulta de las acciones de las partículas de  $\mathcal{S}$ .

**Lema 2.1** En un sistema de puntos materiales

$$\vec{f}_{int} = \vec{0}$$

por lo que a partir de la ecuación (2.1)

$$\vec{f}_{ext} = \dot{\vec{p}}$$

**Definición 2.3** Considerando que la masa de un sistema  $\mathcal{S}$  de puntos materiales está dada por

$$m := \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i$$

el punto  $CI$  con vector de posición

$$\vec{r}_{CI} := \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \vec{r}_i \tag{2.2}$$

recibe el nombre de centro de inercia o centro de masa.

**Observación 2.1** De la definición de centro de masa se obtiene inmediatamente la expresión de la velocidad de este punto respecto del origen  $\mathcal{O}$ , de la derivación de (2.2) resulta

$$\vec{v}_{CI} := \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \vec{v}_i$$

### 2.1.2. Propiedades del Centro Inercial

**Lema 2.2** En un sistema de partículas  $\mathcal{S}$  el centro de masa  $\vec{r}_{CI}$  es tal que su dinámica está dado por

$$m\ddot{\vec{r}}_{CI} = \vec{f}_{ext}$$

donde  $m$  representa la masa total del cuerpo rígido  $\mathcal{S}$  y  $\vec{f}_{ext}$  la sumatoria de fuerzas externas aplicadas en el centro inercial de  $\mathcal{S}$ .

**Teorema 2.1 (Köning)** Supóngase dos sistemas de referencia, uno absoluto con origen  $\mathcal{O}$  y otro relativo con origen  $\mathcal{O}'$  (Figura 2.3). La energía cinética de un sistema de partícula  $\mathcal{S}$  se puede calcular como

$$E_c = E_{c_{\mathcal{O}}} + E_{c_{rel,\mathcal{O}'}} + m\langle \vec{v}_{i,\mathcal{O}'}, \vec{v}_{CI,\mathcal{O}'} \rangle \quad (2.3)$$

donde:

$\vec{v}_{\mathcal{O}'}$  es la velocidad absoluta del origen  $\mathcal{O}'$ ,

$\vec{v}_{CI,\mathcal{O}'}$  es la velocidad del centro inercial relativa a  $\mathcal{O}'$ ,

$E_{c_{\mathcal{O}'}} := \frac{1}{2}mv_{\mathcal{O}'}^2$  es la energía cinética de  $\mathcal{S}$  en el sistema  $\mathcal{O}'$ ,

$E_{c_{rel,\mathcal{O}'}} := \frac{1}{2}\sum_{i \in \mathcal{S}} m_i v_{i,\mathcal{O}'}^2$  es la energía cinética de  $\mathcal{S}$  relativa a  $\mathcal{O}'$ ,

$\vec{v}_{i,\mathcal{O}'}$  denota la velocidad del punto  $i \in \mathcal{S}$  relativa a  $\mathcal{O}'$ .

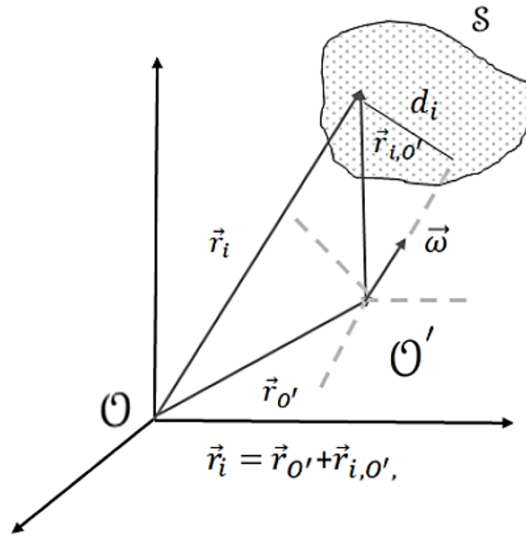


Figura 2.3: Relación entre el sistema absoluto y el auxiliar.

**Prueba 2.1** De la definición de energía cinética, se tiene que

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle \quad (2.4)$$

y además considerando que

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\mathcal{O}'} + \vec{v}_{i,\mathcal{O}'}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i (\langle \vec{v}_{\mathcal{O}'}, \vec{v}_{\mathcal{O}'} \rangle + \langle \vec{v}_{i, \mathcal{O}'}, \vec{v}_{i, \mathcal{O}'} \rangle + 2 \langle \vec{v}_{\mathcal{O}'}, \vec{v}_{i, \mathcal{O}'} \rangle) \\ &= \frac{1}{2} m v_{\mathcal{O}'}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i v_{i, \mathcal{O}'}^2 + \langle v_{\mathcal{O}'}, \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \vec{v}_{i, \mathcal{O}'} \rangle \end{aligned}$$

Finalmente multiplicando y dividiendo por  $m$

$$E_c = E_{c_{\mathcal{O}'}} + E_{c_{rel, \mathcal{O}'}} + m \langle \vec{v}_{i, \mathcal{O}'}, \vec{v}_{CI, \mathcal{O}'} \rangle$$

**Colorario 2.1** El teorema de Kőning tiene dos particularidades importantes.

1. Si el origen  $\mathcal{O}'$  coincide con el centro de inercia del sistema, entonces  $\vec{v}_{CI, \mathcal{O}'} = \vec{0}$ , y

$$E_c = E_{c_{\mathcal{O}'}} + E_{c_{rel, \mathcal{O}'}}$$

2. Si  $\mathcal{S}$  es un cuerpo rígido cuyo pivote coincide con  $\mathcal{O}'$ , entonces existe el vector  $w$  relativo a  $\mathcal{O}'$  tal que,

$$E_{c_{rel, \mathcal{O}'}} = \frac{1}{2} I_{\vec{w}} w^2$$

donde  $I_{\vec{w}} := \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i d_i^2$  se la llama Momento de inercia con respecto al eje de  $\vec{w}$  y  $d_i$  es la distancia a dicho eje.

**Definición 2.4** En términos generales, sean  $\mathcal{S}$  un sistema de puntos y  $\psi\psi'$  un eje, entonces la cantidad

$$I_{\psi\psi'} := \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i d_i^2$$

donde  $d_i$  denota la distancia de  $i \in \mathcal{S}$  a  $\psi\psi'$ , se llama Momento de inercia de  $\mathcal{S}$  con respecto del eje  $\psi\psi'$  (ver Figura 2.4).

### 2.1.3. Teorema de Steiner

**Teorema 2.2 (Steiner)** Considérese el sólido de masa  $M$  de la Figura 2.5 (Con prueba en [21], ver Figura 2.6). Désígnese por  $I_{\psi\psi'}$  y por  $I_{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$  los momentos de inercia respecto de los ejes  $\psi\psi'$ , que no pasa por el centro de masa, y  $\mathcal{O}\mathcal{O}'$  que sí lo hace es paralelo a  $\psi\psi'$  y se halla separado de éste una distancia  $d$ . Entre tales momentos de inercia existe la relación

$$I_{\psi\psi'} = I_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} + md^2 \tag{2.5}$$

### 2.1.4. Sistemas no inerciales

**Definición 2.5** Un sistema coordinado que no experimenta aceleración se llama Sistema inercial, en caso contrario se denomina Sistema no inercial.

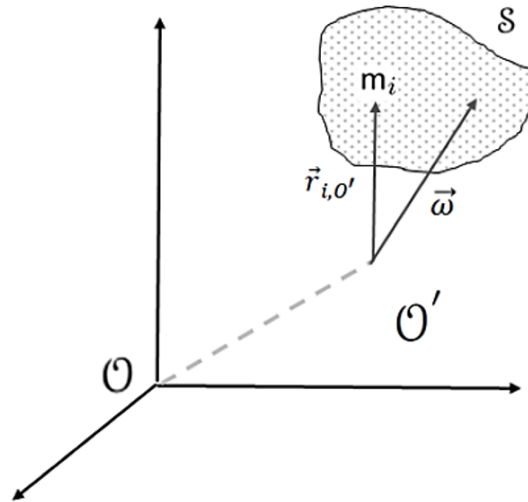


Figura 2.4: Cuerpo plano rotando en su plano respecto del pivote  $O$ .

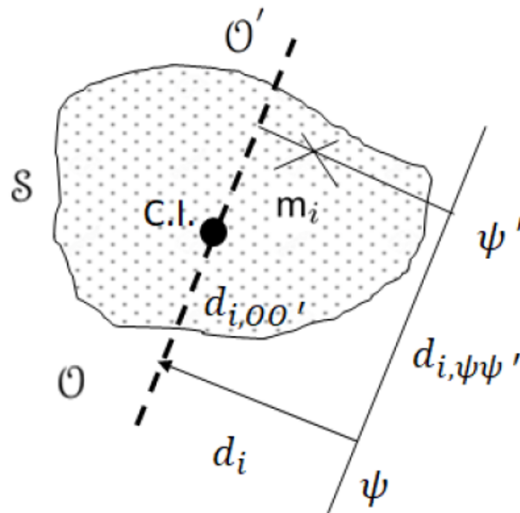


Figura 2.5: Sólido rotando alrededor de un eje que no pasa por su centro inercial.

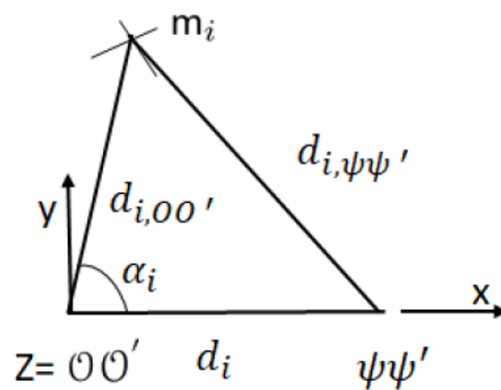


Figura 2.6: Diagrama de distancias a los ejes  $OO'$  y  $\psi\psi'$  de un punto  $i \in S$ .



### Segunda Ley de Newton con respecto de un sistema relativo

Se sabe que la aceleración de un punto de posición  $\vec{r}_{abs}$  respecto de un sistema coordinado absoluto puede ser descrita en términos de la aceleración  $\vec{w}_{\mathcal{O}}$  y la velocidad y aceleración angular  $\vec{w}$  y  $\vec{\epsilon}$  de un sistema coordinado relativo con origen  $\mathcal{O}$ , a saber

$$\vec{r}_{abs} = \vec{w}_{tr} + \vec{w}_{rel} + \vec{w}_{cor}$$

donde las aceleraciones de traslación y Coriolis están definidas como

$$\begin{aligned}\vec{w}_{tr} &:= \vec{w}_{\mathcal{O}} + [\vec{\epsilon}, \vec{r}_{rel}] + [\vec{w}[\vec{w}, \vec{r}_{rel}]] \\ \vec{w}_{cor} &:= 2[\vec{w}, \vec{v}_{rel}]\end{aligned}$$

mientras que  $\vec{r}_{rel}$ ,  $\vec{v}_{rel}$  y  $\vec{w}_{rel}$  representan la posición, la velocidad y la aceleración relativas del punto, es decir, respecto del sistema relativo. Ahora bien, se sabe que el CI (Centro Inercial) de un sistema de puntos  $\mathcal{S}$  con masa total constante  $m$  cumple la relación

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}}_{CI,abs}$$

donde  $\vec{r}_{CI,abs}$  denota la posición de CI. Si

$$\vec{w}_{CI,abs} := \ddot{\vec{r}}_{CI,abs} \quad (2.6)$$

la expresión (2.6) se puede presentar como

$$\dot{\vec{p}} = m\vec{w}_{CI,abs}$$

resultado que, en combinación con la Segunda Ley de Newton (2.1), lleva a

$$m\vec{w}_{CI,abs} = \vec{f}_{ext}$$

o bien,

$$m(\vec{w}_{CI,tr} + \vec{w}_{CI,rel} + \vec{w}_{CI,cor}) = \vec{f}_{ext} \quad (2.7)$$

de donde se llega a

$$m\vec{w}_{CI,tr} = \vec{f}_{ext} - m\vec{w}_{CI,rel} - m\vec{w}_{CI,cor} \quad (2.8)$$

**Definición 2.6** *Las cantidades*

$$\vec{f}_{CI,tr} := -m\vec{w}_{CI,tr} \quad (2.9)$$

*se llama fuerza de traslación inercial,*

$$\vec{f}_{CI,cor} := -m\vec{w}_{CI,cor} \quad (2.10)$$

*se llama fuerza de Coriolis inercial.*

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) permiten obtener una expresión relativa de la ley (2.1) que describe la dinámica del centro inercial respecto a un sistema de referencia relativo o acelerado.

$$\begin{aligned}m\vec{w}_{CI,rel} &= \vec{f}_{ext} + (-m\vec{w}_{CI,tr}) + (-m\vec{w}_{CI,cor}) \\ m\vec{w}_{CI,rel} &= \vec{f}_{ext} + \vec{f}_{CI,tr} + \vec{f}_{CI,cor}\end{aligned}$$

## 2.2. Ecuaciones dinámicas de Lagrange

La Segunda Ley de Newton y las ecuaciones dinámicas de Euler son formalismos que permiten obtener las ecuaciones de movimiento en sistemas mecánicos, sin embargo generalmente su aplicación se complica si la geometría del movimiento no es simple y/o por la presencia de restricciones a éste. Las ecuaciones de Lagrange resultan una herramienta imprescindible pues incluyen de manera natural las restricciones cinemáticas, además de que se basan en el concepto de coordenadas generalizadas, las cuales permiten describir la dinámica en términos de las variables asociadas con los grados de libertad del sistema. Parte fundamental de las ecuaciones de Lagrange son las fuerzas generalizadas, éstas se definen y caracterizan por las fuerzas que afectan la dinámica de un sistema. En general, los distintos puntos materiales de los sistemas mecánicos guardan conexiones entre sí, llamadas conexiones o restricciones mecánicas. Éstas son las relaciones que condicionan el movimiento y se describen por expresiones matemáticas [22].

Un sistema simple es un sistema cuyo Lagrangiano se encuentra en la forma de la diferencia entre su energía cinética (semidefinida positiva) y su energía potencial [23], como

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_c - E_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - E_p(\mathbf{q}) \quad (2.11)$$

$E_c$  es la energía cinética y  $E_p(\mathbf{q})$  es la energía potencial del sistema debido a la fuerza de gravedad y/o fuerzas con resortes,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  denota la configuración del vector de coordenadas generalizadas,  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia del sistema.

**Lema 2.3 (Lagrange)** *Sea  $\mathcal{S}$  un sistema holonómico de  $N$  puntos materiales cuyas masas no dependen de la velocidad  $\dot{q}$  ni de la posición  $q$ . En tal sistema la dinámica queda gobernada por la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

donde  $\mathcal{L}$  es el Lagrangiano de  $\mathcal{S}$ ,  $\tau_i$  recibe el nombre de fuerza generalizada correspondiente a la coordenada  $q_i$ , y la  $E_p$  definida como

$$E_p = \sum_{i=1}^n E_{p_{mi}} \quad (2.13)$$

El uso de las ecuaciones de Lagrange para el modelado dinámico de un sistema mecánico simple, se reduce a cuatro etapas [24]:

1. Cálculo de la energía cinética (Ecuación (2.3)).
2. Cálculo de la energía potencial (Ecuación (2.13)).
3. Cálculo del Lagrangiano (Ecuación ((2.11)).
4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange (Ecuación (2.12)).

Las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico actuado o subactuado suele tomar la siguiente forma vectorial, una vez desarrolladas las ecuaciones de Lagrange

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = U \quad (2.14)$$

El término  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  contiene dos tipos de términos, uno llamado centrífugos y otros Coriolis. Además,  $G(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  contiene los términos gravitacionales, y  $U \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el vector que contiene las fuerzas generalizadas de entrada para el sistema mecánico.

## 2.3. Sistemas Mecánicos Tipo Péndulo

A continuación se presenta una serie de mecanismos cuya principal característica es su configuración tipo Péndulo. Todos estos ejemplos se eligieron debido a la complejidad del diseño de leyes de control, y al hecho de que su respuesta física resulta de gran interés en la investigación de tareas con control y robótica [25–29].

Los siguientes se consideran sistemas subactuados, en otras palabras, sistemas mecánicos donde hay ausencia de actuadores en alguna de las articulaciones del mecanismo. También, son definidos como mecanismos que poseen menor cantidad de entradas de control que grados de libertad, esto puede deberse a fallas técnicas, o para reducir el costo de diseño.

### 2.3.1. Péndulo-Carro

El sistema Péndulo-Carro está representado en la Fig.2.7 [30], del cual se definen los parámetros como:

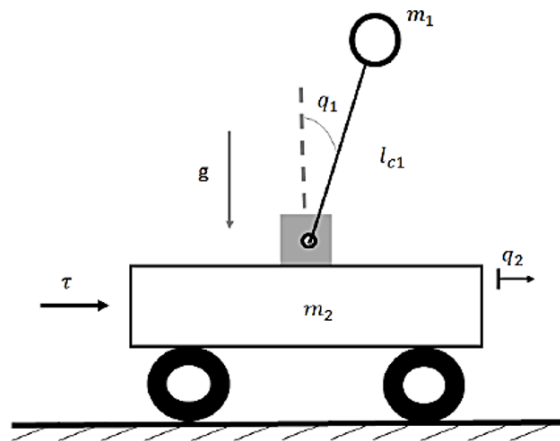


Figura 2.7: Sistema Péndulo-Carro.

- $m_1$  : Masa del péndulo [ $Kg$ ].
- $m_2$  : Masa del carro [ $Kg$ ].
- $l_{c1}$  : Distancia del pivote al centro de masa del péndulo [ $m$ ].

- $g$  : Aceleración debido a la gravedad [ $m/s^2$ ].
- $q_2$  : Distancia del centro de masa del carro desde su posición inicial [ $m$ ].
- $q_1$  : Ángulo del péndulo respecto a la vertical [ $rad$ ].
- $\tau$  : Fuerza aplicada al carro [ $N$ ].

Ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{q}_2 - m_1 l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1^2 + m_1 l_{c1} \cos(q_1) \ddot{q}_1 &= \tau \\ m_1 \ddot{q}_2 \cos q_1 + m_1 l_{c1}^2 \ddot{q}_1 - m_1 g \sin(q_1) &= 0 \end{aligned}$$

### 2.3.2. Doble Péndulo

El doble péndulo (ver Fig.2.8) es un mecanismo planar de dos grados de libertad formado de la unión de dos eslabones. Como se puede observar, la unión entre los eslabones es de tipo revoluta por lo que pueden girar libremente alrededor de sus ejes de rotación [31, 32].

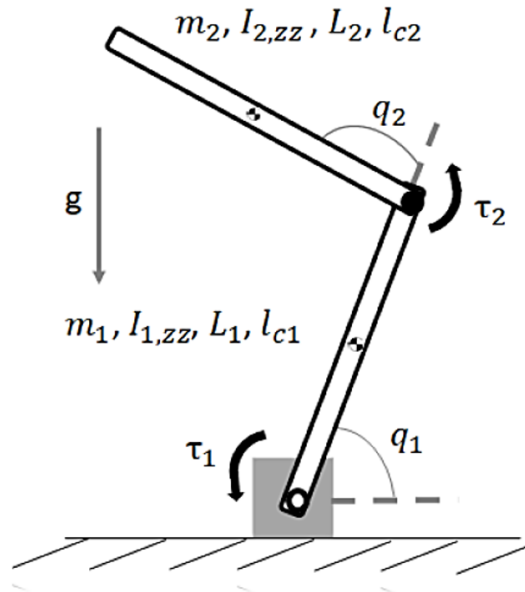


Figura 2.8: Doble péndulo.

Los parámetros del doble péndulo son:

- $L_1$  : Longitud del eslabón 1 [ $m$ ].
- $L_2$  : Longitud del eslabón 2 [ $m$ ].
- $I_{1,zz}$  : Momento de inercia del eslabón 1 [ $Kg * m^2$ ].
- $I_{2,zz}$  : Momento de inercia del eslabón 2 [ $Kg * m^2$ ].
- $m_1$  : Masa del eslabón 1 [ $Kg$ ].
- $m_2$  : Masa del eslabón 2 [ $Kg$ ].

- $l_{c1}$  : Distancia del centro de masa del eslabón 1 [m].
- $l_{c2}$  : Distancia del centro de masa del eslabón 2 [m].
- $g$  : Fuerza de gravedad [ $m/s^2$ ].
- $\tau_1$  : Torsión aplicada al eslabón 1 [Nm].
- $\tau_2$  : Torsión aplicada al eslabón 2 [Nm].
- $q_1$  : Desplazamiento angular del eslabón 1 [rad].
- $q_2$  : Desplazamiento angular del eslabón 2 respecto al eslabón 1 [rad].

Ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 - \phi\dot{q}_2^2 - 2\phi\dot{q}_1\dot{q}_2 + (h_1 + h_2)g &= \tau_1 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \phi\dot{q}_1^2 + h_2g &= \tau_2 \end{aligned}$$

cuyos coeficientes son

- $m_{11} = m_2L_1^2 + \frac{1}{3}m_1L_1^2 + \frac{1}{3}m_2L_2^2 + 2m_2L_1l_{c2}\cos(q_2)$
- $m_{12} = m_{21} = \frac{1}{3}m_2L_2^2 + m_2L_1l_{c2}\cos(q_2)$
- $m_{22} = \frac{1}{3}m_2L_2^2$
- $\phi = m_2L_1l_{c2}\sin(q_2)$
- $h_1 = (m_1l_{c1} + m_2L_1)\cos q_1$
- $h_2 = m_2l_{c2}\cos(q_1 + q_2)$

Este mecanismo tiene dos configuraciones particulares, cuando  $\tau_1 = 0$  se le conoce como **Acrobot**, y cuando  $\tau_2 = 0$  se le conoce como **Pendubot**.

### 2.3.3. Péndulo doble sobre un carro

El Péndulo doble sobre un carro (ver Fig.2.9) es una extensión del péndulo doble al agregarse una masa extra (carro) cuyo desplazamiento es prismático y cuya entrada de control es dicha masa o carro [33].

Parámetros del doble péndulo sobre un carro:

- $L_1$  : Longitud del eslabón 1 [m].
- $L_2$  : Longitud del eslabón 2 [m].
- $I_{1,zz}$  : Momento de inercia del eslabón 1 [ $Kg * m^2$ ].
- $I_{2,zz}$  : Momento de inercia del eslabón 2 [ $Kg * m^2$ ].
- $m_1$  : Masa del eslabón 1 [Kg].

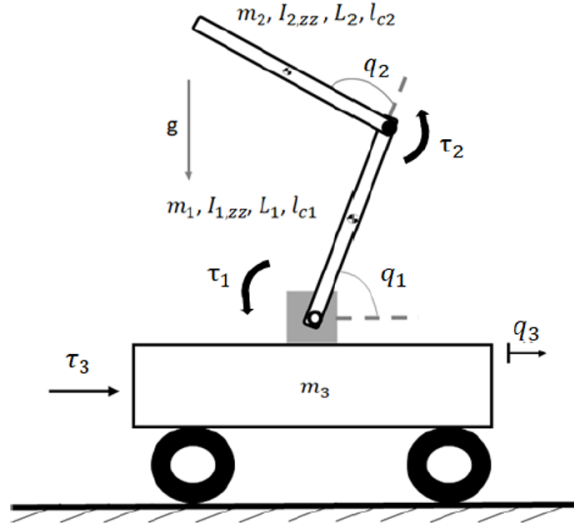


Figura 2.9: Péndulo doble sobre un carro.

- $m_2$  : Masa del eslab3n 2 [ $Kg$ ].
- $m_3$  : Masa del carro [ $Kg$ ].
- $l_{c1}$  : Distancia del centro de masa del eslab3n 1 [ $m$ ].
- $l_{c2}$  : Distancia del centro de masa del eslab3n 2 [ $m$ ].
- $g$  : Fuerza de gravedad [ $m/s^2$ ].
- $\tau_1$  : Torsi3n aplicada al eslab3n 1 [ $Nm$ ].
- $\tau_2$  : Torsi3n aplicada al eslab3n 2 [ $Nm$ ].
- $\tau_3$  : Torsi3n aplicada al carro [ $Nm$ ].
- $q_1$  : Desplazamiento angular del eslab3n 1 [ $rad$ ].
- $q_2$  : Desplazamiento angular del eslab3n 2 respecto al eslab3n 1 [ $rad$ ].
- $q_3$  : Desplazamiento horizontal del eslab3n 2 respecto al eslab3n 1 [ $rad$ ].

Ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 - m_{13}\ddot{q}_3 - \phi\dot{q}_2^2 - 2\phi\dot{q}_1\dot{q}_2 + (h_1 + h_2)g &= \tau_1 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 - m_{23}\ddot{q}_3 + \phi\dot{q}_1^2 + h_2g &= \tau_2 \\ -m_{31}\ddot{q}_1 - m_{32}\ddot{q}_2 + m_{33}\ddot{q}_3 - (h_1 + h_2)\dot{q}_1^2 - h_2\dot{q}_2^2 - 2h_2\dot{q}_1\dot{q}_2 &= \tau_3 \end{aligned}$$

cuyos coeficientes son:

- $m_{11} = m_2L_1^2 + m_1l_{c1}^2 + m_2l_{c2}^2 + I_{1,zz} + I_{2,zz} + 2m_2L_1l_{c2}\cos(q_2)$
- $m_{12} = m_{21} = m_2l_{c2}^2 + I_{2,zz} + m_2L_1l_{c2}\cos(q_2)$
- $m_{13} = m_{31} = (m_1l_{c1} + m_2L_1)\sin(q_1) + m_2l_{c2}\sin(q_1 + q_2)$

- $m_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_{2,zz}$
- $m_{23} = m_{32} = m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2)$
- $m_{33} = m_3 + m_1 + m_2$
- $\phi_1 = m_2 L_1 l_{c2} \sin(q_2)$
- $h_1 = (m_1 l_{c1} + m_2 L_1) \cos q_1$
- $h_2 = m_2 l_{c2} \cos(q_1 + q_2)$

## Conclusión

En este capítulo se estudiaron los fundamentos físicos de los sistemas mecánicos, que incluyen las Leyes de Newton y las propiedades del centro de inercia de un sistema de puntos materiales o cuerpo rígido en movimiento. También, se introdujeron conceptos importantes para el desarrollo de las ecuaciones de energía de los sistemas mecánicos, estos son, el teorema de K onig para la energía cinética de un sistema, y el teorema de Steiner para cuerpos rígidos cuyo eje de rotación se encuentra alejado de su centro inercial. A su vez, se definió el concepto de sistema físico no inercial, y su diferencia con respecto de un sistema inercial fijo. Además, se expuso la metodología de las ecuaciones de Lagrange, a través de la cual se pueden obtener las ecuaciones dinámicas de los sistemas mecánicos. Finalmente, se expusieron algunos ejemplos de sistemas mecánicos tipo péndulo estudiados en el desarrollo de sistemas de control y sistemas robóticos.





# Capítulo 3

## Control Adaptable por Modos Deslizantes

En el análisis de un problema de control para cualquier sistema dinámico, siempre es imperativo tomar en cuenta las discrepancias que presenta una aproximación o modelo matemático que describe el comportamiento de un sistema físico. Estas discrepancias, se generan por parámetros no modelados del sistema real, por perturbaciones externas desconocidas, o por alguna dinámica parásita o que no quedó modelada en la ecuación dinámica. Por este motivo, diseñar una ley de control apropiada suele ser un problema complejo. En este sentido, una de las áreas de control que ofrece soluciones en el diseño de controladores para sistemas de control en lazo cerrado, es el control robusto. Este enfoque es capaz de estabilizar sistemas en presencia de incertidumbres y perturbaciones acotadas. Un enfoque particular de control robusto es el Control Adaptable por Modos Deslizantes (ASMC), el cual puede presentarse mediante dos Leyes. En este capítulo se presentan los fundamentos del CMD, y del ASMC, para ambos casos, y se presenta también el desarrollo de las leyes de control basadas en este método.

### 3.1. Antecedentes

El desarrollo de los controladores por MD se remontan a los años 60 en la Unión Soviética con la aparición del concepto matemático de los “Sistemas de Estructura Variable” o VSS por sus siglas en inglés. Por lo que pronto, el CMD se volvió el modo principal de operación para este tipo de sistemas VSS [9]. Por lo anterior, las herramientas matemáticas desarrolladas para estudiar los sistemas basados en MD fueron inicialmente orientadas al análisis del comportamiento de sistemas de control discontinuo. En ese momento, se le dio especial atención a las numerosas capacidades que proporciona este tipo de dinámica discontinua, tal como el diseño de controladores con alta exactitud y propiedades de estabilización.

En consecuencia, junto con los ya conocidos controladores lineales, los controladores por MD se implementaron en gran medida en sistemas de control para generadores de corriente continua, o sistemas discontinuos de alta frecuencia como conmutadores o transistores [34]. Por lo tanto, debido a su propiedad de reducción de orden, baja sensibilidad a perturbaciones y variaciones en el modelo de la planta, los controladores basados en MD se han convertido en una excelente herramienta

para controlar sistemas con una dinámica no lineal de alto orden bajo condiciones de incertidumbre o perturbaciones acotadas presentes en procesos y mecanismos modernos [35].

De modo que, el CMD es una estrategia de control no lineal para sistemas con incertidumbres, con un amplio campo de aplicaciones [15, 36]. Debido al uso de la función de discontinuidad, sus principales características son:

- La robustez del sistema en lazo cerrado, y
- y El tiempo finito de convergencia.

Sin embargo, su diseño requiere el conocimiento de la cota de las incertidumbres, la cual pueden ser, desde un punto de vista práctico, una tarea difícil: ya que la cota puede ser sobre estimada y como resultado tener ganancias excesivas. Por otra parte, la principal desventaja del CMD es el bien conocido *fenómeno chattering* (para su análisis ver [37, 38]), el cual podría dañar los actuadores e incluso el sistema. Una primera forma de reducir el chattering es el uso de una superficie acotada: en este caso, algunas aproximaciones han sido propuestas, como en [15]; otra manera para decrementar el efecto del chattering es el uso de un control por MD de orden superior [16–20, 39]. Sin embargo, en ambos casos el conocimiento de las capas de incertidumbre es necesario. Y como el objetivo es no requerir de esas capas, otra forma consiste en usar un Control Adaptable por Modos Deslizantes. La meta consiste en asegurar la dinámica adaptable de la ganancia del controlador para ser lo mas pequeña posible mientras sea lo suficiente robusta para contraatacar las incertidumbres y perturbaciones.

La idea básica de la aproximación del control adaptable consiste en diseñar el sistema que exhiba las mismas propiedades dinámicas en condiciones de incertidumbre basadas en la utilización de la información actual. Esto implica modificar la ley de control utilizada por un controlador que haga frente al hecho de que los parámetros del sistema que se controlan varían lentamente en el tiempo o son inciertos. Incluso, la ley de control adaptable implica mejorar las características de la dinámica mientras las propiedades del controlador de la planta o el entorno estén variando [40, 41]. Sin la adaptación del control original por MD se demuestra robustez con respecto a los parámetros que varían y perturbaciones [42]. La eficiencia del control fue probada para cambiar la posición o ecuación de las superficies de discontinuidad sin ninguna información de los parámetros de la planta, idea que data de los años sesenta. La idea del diseño podría formularse de la siguiente manera: si existe una superficie deslizando entonces los coeficientes de conmutación en el plano pueden ir variando para mejorar la dinámica del sistema.

Sin embargo, las publicaciones antes mencionadas no tomaron en cuenta el principal obstáculo de la aplicación del CMD, el fenómeno chattering, el cual es inherente en el sistema (ver, por ejemplo [18, 37, 38]). Este fenómeno es bien conocido en la literatura [43]; por lo que los esfuerzos de los investigadores fueron orientados a la aplicación de los principios de adaptabilidad para reducir el chattering. Desde que la amplitud del chattering es proporcional a la magnitud de discontinuidad del control, uno de los posibles métodos adaptables es relatado para reducir la magnitud al

mínimo valor admisible dictado por las condiciones del CMD existente. Entonces, en [44] la ganancia de control depende de la distancia del estado del sistema a la superficie de discontinuidad.

El algoritmo del Control Adaptable por Modos Deslizantes permite ajustar dinámicamente la ganancia del control sin el conocimiento de incertidumbres o perturbaciones acotadas. El objetivo de este algoritmo [44], radica en discutir dos nuevas metodologías para el control de la clase de sistemas no lineales con incertidumbres:

- *Primera Ley.* La primera es referida a la *Adaptación Sigma del Control por Modos Deslizantes (Sigma Adaptation of Sliding Modes Control)* y trata con modelos para los cuales las incertidumbres son acotadas, pero estas cotas (las cuales son finitas) se desconocen; este proceso de adaptación con la magnitud de la ganancia de control variando determina el momento cuando deben iniciar las acciones por MD (ver [44, 45]).
- *Segunda Ley.* La Segunda metodología está asociada con la *Adaptación Dinámica del Control por Modos Deslizantes (Dynamic Adaptation of Sliding Modes)* bajo incertidumbres conocidas donde el proceso de adaptación es continuo durante el MD, usando la estimación actual del correspondiente control equivalente (ver [46]).

## 3.2. Control por Modos Deslizantes

El fenómeno de los modos deslizantes aparece en los sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias con parte derecha discontinua. El ejemplo típico de un sistema con modos deslizantes, es un sistema de relé de segundo orden. La entrada de control se describe como [47],

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y = u \quad u = -K * \text{sign}(s), \quad s = cx + \dot{y},$$

$$a_1, a_2, K, c \in \mathbb{R} \quad \text{son constantes.}$$

$K$  tomará dos valores  $K$  o  $-K$  y experimenta discontinuidades en la superficie  $s = 0$  en el plano de estados  $(y, \dot{y})$  (ver Figura 3.1 ). Se desprende del análisis del plano de estados que, en la vecindad del segmento  $II'$  en la superficie de deslizamiento  $s = 0$ , las trayectorias van en dirección opuesta, lo cual lleva a la aparición de los modos deslizantes a lo largo de esta superficie. La ecuación de dicha superficie es

$$\dot{y} + cy = 0$$

Se puede interpretar que

- El orden de la ecuación  $s$  es menor que la del sistema original.
- Los modos deslizantes no dependen de la dinámica de la planta, y solo está determinada por el parámetro  $c$ .

Los modos deslizantes se volvieron el principio de operación de las llamadas VSS, una VSS consiste en un conjunto de subsistemas continuos con una lógica de deslizamiento propia, como consecuencia, las acciones de control son funciones de estados

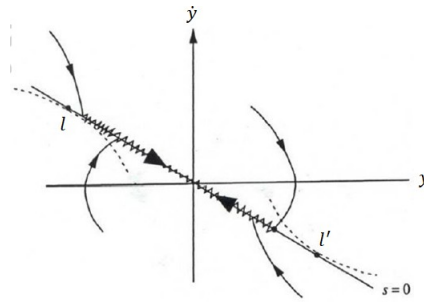


Figura 3.1: Modos Deslizantes de un sistema tipo relé.

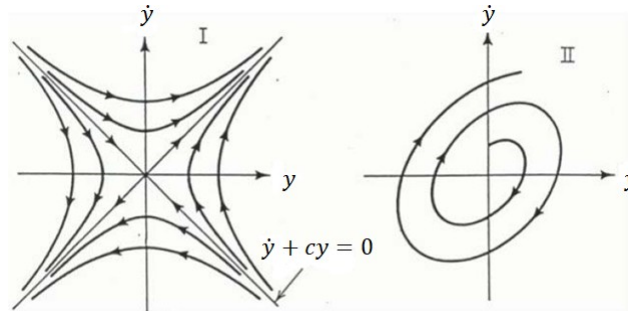


Figura 3.2: Plano de estados  $(\dot{y}, y)$  de dos sistemas inestables.

discontinuas, perturbaciones, y entradas de referencia. El sistema tipo relé con estados dependientes de la amplitud de la variable de control ilustra este tipo de sistemas. El sistema con  $a_1 = 0$  y  $a < 0$  consta de dos estructuras lineales inestables ( $u = kx$  y  $u = -kx$ , véase Figura 3.1) con  $y = 0$  y  $s = 0$  como líneas de conmutación. Como está claro desde el plano de estado del sistema, el estado alcanza la línea de conmutación en  $s = 0$  para cualquier condición inicial. Entonces, el modo deslizante ocurre en esta línea (Figura 3.3) con la ecuación de movimiento  $\dot{y} + cy = 0$ , mientras que el vector de estado decae exponencialmente. De forma similar al sistema de relé, después del inicio del modo deslizante, el movimiento se rige por una ecuación de orden reducida que no depende de los parámetros de la planta.

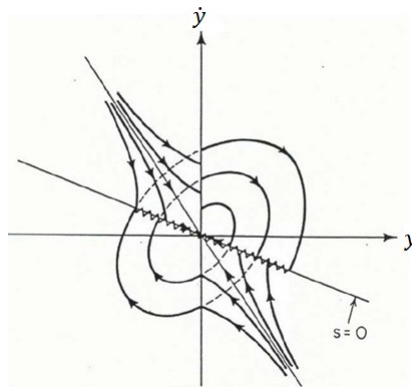


Figura 3.3: Plano de estados de un VSS.

Considérese el sistema no lineal afín con modos deslizantes,

$$\begin{aligned} \dot{y}_s &= f(t, y_s) + B(y_s, t)u, \\ u_i &= \begin{cases} u_i^+(t, y_s) & \text{si } s_i > 0 \\ u_i^-(t, y_s) & \text{si } s_i < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $y \in \mathbb{R}^m$  es un vector de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  es un vector de control  $u_i^+(t, y_s)$ ,  $u_i^-(t, y_s)$  y  $s_i(y_s)$  son funciones continuas con argumentos,  $u_i^+ \neq u_i^-$ . El control se diseña como una función discontinua del estado tal que cada componente se somete a discontinuidades en alguna superficie en el espacio de estado del sistema.

Por lo general en (3.1) los modos deslizantes existen en la intersección de todas las superficies discontinuas  $s_i = 0$ , o en el conjunto

$$s(y_s) = s^T [s_1, \dots, s_m] \quad \text{de dimensiones } n - m.$$

En modo deslizante, la variable  $s$  es cercana a cero, mientras que la acción de control toma un valor finito  $u_{av}$  (un valor promedio, Figura 3.4). Por tanto, el control implementa una ganancia teóricamente infinita, que es la herramienta usada para rechazar perturbaciones y otras incertidumbres del sistema. A diferencia del control continuo, los modos deslizantes presentan la propiedad de invarianza en tiempo finito. Además, dado que las trayectorias en modos deslizantes pertenecen a una superficie o conjunto de superficies de menor orden que el sistema original, esto posibilita al diseñador simplificar y desacoplar la ley de control. Tanto la reducción de orden, como la invarianza son visibles por arriba de sistemas de segundo orden.

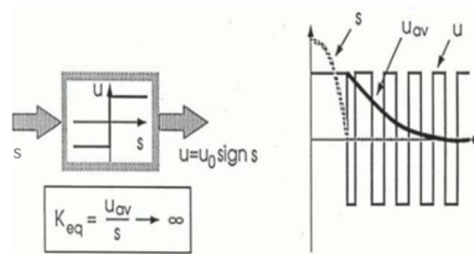


Figura 3.4: Implementación de alta ganancia en modos deslizantes.

### 3.2.1. Solución de Filipov

Considere inicialmente el caso cuando el sistema (3.1) tiene una sola entrada, y se define una superficie en el espacio de estados [10]

$$S = \{y_c : s(y_c) = 0\} \quad (3.2)$$

donde  $S : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

**Definición 3.1** Los modos deslizantes ideales se dice que tienen lugar en el conjunto (3.2) si los estados  $y_c$  cambian en el tiempo tal que  $s(t_r) = 0$  para un tiempo finito  $t_r \in \mathbb{R}^+$  y  $s(y_c) = 0, \forall t > t_r$ .

Supongamos que  $y_{c0}$  es un punto de discontinuidad en  $S$  y define  $f_-^c(y_{c0})$  y  $f_+^c(y_{c0})$  como los límites de  $f^c(y_c)$ , definidos en [10] como  $\dot{x}(t) = f^c(x)$  donde  $f^c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , cuando el punto  $y_{c0}$  es aproximado desde los lados opuestos de la tangente de  $S$  en  $y_{c0}$ . La solución propuesta por Filippov viene dada por

$$\dot{y}_c(t) = (1 - \alpha)f_-^c(y_c) + \alpha f_+^c(y_c) \tag{3.3}$$

donde  $0 < \alpha < 1$ . El coeficiente  $\alpha$  se acoge de tal manera que

$$f_a^c = (1 - \alpha)f_-^c(y_c) + \alpha f_+^c \tag{3.4}$$

sea tangencial a  $S$  (ver Figura 3.5).

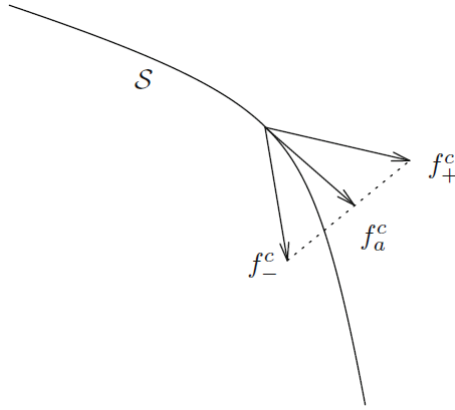


Figura 3.5: Modos Deslizantes por Filippov.

**Observación 3.1** *De la discusión anterior, está claro que la solución Filippov es una solución promedio de dos vectores de velocidad en el punto  $y_{s0}$ . La ecuación (3.3) se puede considerar como una ecuación diferencial cuyo lado derecho se define como el conjunto convexo*

$$f_{flip}(y_c) = (1 - \alpha)f_-^c + \alpha f_+^c : \text{para todo } \alpha \in (0, 1)$$

por lo tanto

$$\dot{y}_c \in f_{flip}(y_c)$$

Los valores de  $\alpha$  que aseguran  $\dot{s}(t)$  se pueden calcular explícitamente a partir de la ecuación (3.3). Por simplicidad, supongamos que  $s(t) = Sy_c$  donde  $s \in \mathbb{R}^n$ . Entonces explícitamente

$$\dot{s} = Sy_c = (1 - \alpha)Sf_-^c + \alpha Sf_+^c$$

y, para mantener  $s = 0$ ,  $\alpha$  debe satisfacer

$$(1 - \alpha)Sf_-^c + \alpha Sf_+^c = 0$$

por consiguiente

$$\alpha = \frac{Sf_-^c}{Sf_-^c - Sf_+^c}$$

por lo tanto

$$\dot{y}_c = \frac{Sf_-^c f_+^c - Sf_+^c f_-^c}{Sf_-^c - Sf_+^c}$$

En este sentido, dado que  $u(y_c)$  introduce una discontinuidad (ver Figura 3.6), la acción de control queda definida como

$$u_i = \begin{cases} u_i^+ & \text{si } s_i > 0 \\ u_i^- & \text{si } s_i < 0 \end{cases}, i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

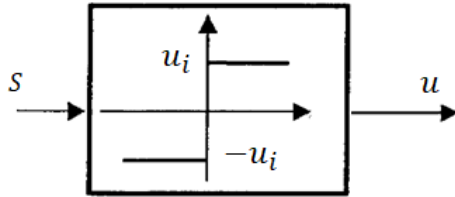


Figura 3.6: Función Signo.

El problema de control consiste en desarrollar una ley que force los estados de un sistema a alcanzar la superficie  $S$ , y que genere los modos deslizantes para hacer converger a  $s(y_c)$  en un tiempo finito [48].

El diseño de la ley de control de modos deslizantes se puede dividir en dos fases como se muestra en la Figura 3.7:

1. La fase 1 (fase de alcance) consiste en la construcción de una superficie de deslizamiento adecuada para que la distancia de la dinámica del sistema confinado a la superficie deslizante  $S$  produzca un comportamiento deseado.
2. La fase 2 (fase deslizante) implica el diseño de una ley de control discontinuo que force la trayectoria del sistema a la superficie deslizante y la mantenga ahí.

$$u = u_i \text{sign}(s)$$

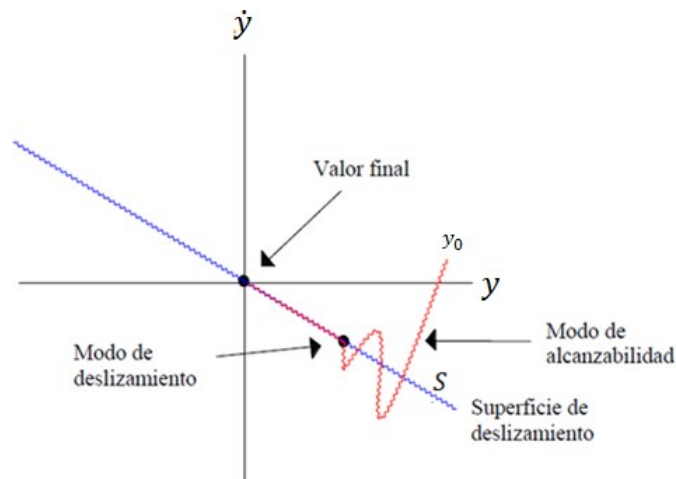


Figura 3.7: Modos deslizantes.

Para mantener el régimen de deslizamiento ideal, la señal de control debe ser capaz de conmutar con una frecuencia infinita entre valores positivos a negativos, esto produce un efecto indeseado llamado **chattering**, así que las trayectorias oscilan alrededor de la superficie de deslizamiento (véase Figura 3.7). La presencia del chattering puede excitar dinámicas no modeladas, reducir la exactitud del control, introducir grandes pérdidas por calor en circuitos eléctricos de potencia, aparte de producir fallas en dispositivos mecánicos. Este efecto puede reducirse, por ejemplo, aplicando técnicas de MD de segundo orden.

### 3.2.2. Efecto chattering

Las aplicaciones de CMD pueden experimentar un fenómeno no deseado de oscilaciones con una frecuencia y amplitud finitas, las cuales son conocidas como chattering. El chattering es un efecto que aparece naturalmente en este tipo de controladores debido su comportamiento discontinuo, y puede ser peligroso porque provoca baja exactitud en los controladores, amplio juego en partes mecánicas, y grandes pérdidas de calor en circuitos de potencia. Existen dos razones que pueden producir el chattering [49]:

- El chattering puede presentarse debido a dinámica rápida que fue omitida en el modelo ideal. Estas dinámicas sin modelar con pequeñas constantes de tiempo, generalmente no se tienen en cuenta en los modelos de servomecanismos, sensores y procesamiento de datos.
- La segunda razón, es la implementación de controladores digitales con muestreo finito, que causa oscilación por discretización. Teóricamente, un modo deslizante ideal implica una frecuencia de deslizamiento infinita. Dado que el control es constante dentro del intervalo de muestreo, la frecuencia de deslizamiento no puede exceder la frecuencia de muestreo.

## 3.3. Estabilidad de Lyapunov

La teoría de la estabilidad juega un papel central en ingeniería de control. Existen diferentes tipos de problemas de estabilidad que surgen en el estudio de sistemas dinámicos. La estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema suele analizarse en el sentido de Lyapunov. Un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones que comienzan en puntos cercanos se quedan cerca; de lo contrario, es inestable. Es asintóticamente estable si todas las soluciones que comienzan en puntos cercanos no solo permanecen cerca, pero también tienden al punto de equilibrio a medida que el tiempo se acerca al infinito. Los teoremas de estabilidad de Lyapunov dan condiciones suficientes para la estabilidad, estabilidad asintótica, etc. No dicen si las condiciones dadas también son necesarias. Además, el análisis de estabilidad de Lyapunov puede mostrar las cotas de la solución de un sistema [50].

Considere el siguiente sistema dinámico que satisface

$$\dot{z} = f(z, t) \quad z(t_0) = z_0 \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (3.6)$$

Supondremos que  $f(z, t)$  satisface las condiciones estándar para la existencia y unicidad de soluciones. Tales condiciones son, por ejemplo, que  $f(z, t)$  es Lipschitz



continuo con respecto a  $z$ , uniformemente en  $t$ , y por partes continuo en  $t$ . Un punto  $z^* \in \mathbb{R}^n$  es un punto de equilibrio de (3.6) si  $f(z^*, t) := 0$ . De manera intuitiva y algo cruda, decimos que un punto de equilibrio es localmente estable si todas las soluciones que comienzan cerca de  $z^*$  (significa que las condiciones iniciales están en la vecindad de  $z^*$ ) permanecen cerca de  $z^*$  para todo el tiempo  $t$ . Se dice que el punto de equilibrio  $z^*$  es localmente asintóticamente estable si  $z^*$  es localmente estable y, además, todas las soluciones que comienzan cerca de  $z^*$  tienden hacia  $z^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Cambiando el origen del sistema, podemos suponer que el punto de equilibrio de interés ocurre en  $z^* = 0$ .

**Definición 3.2** (*Estabilidad en el sentido de Lyapunov*) El punto de equilibrio  $z^* = 0$  en (3.6) es estable en  $t = t_0$  si para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ , tal que

$$\|z(t_0)\| < \delta \mapsto \|z(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.7)$$

**Definición 3.3** (*Estabilidad asintótica*) Un punto de equilibrio  $z^* = 0$  para (3.6) es asintóticamente estable en  $t = t_0$  si

1.  $z^* = 0$  es estable, y
2.  $z^* = 0$  es localmente atractivo, es decir, existe  $\delta(t_0)$  tal que

$$\|z(t_0)\| < \delta \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0 \quad (3.8)$$

Como en la definición anterior la estabilidad asintótica se define en  $t_0$ , la estabilidad asintótica uniforme requiere:

1.  $z^* = 0$  es uniformemente estable y,
2.  $z^* = 0$  es uniformemente localmente atractiva; es decir, existe  $\delta$  independiente de  $t_0$  para lo cual se cumple la ecuación (3.8). Además, se requiere que la convergencia en la ecuación (3.8) sea uniforme.

### 3.3.1. Método directo de Lyapunov

El método de Lyapunov permite determinar la estabilidad de un sistema sin encontrar explícitamente la solución de la ecuación diferencial (3.6). El método es una generalización de la idea de que si hay alguna “medida de energía” en un sistema, entonces podemos estudiar la tasa de cambio de esta energía para determinar su estabilidad. Sea  $B$  una bola de tamaño  $\epsilon$  alrededor del origen,  $B = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| < \epsilon\}$ .

**Definición 3.4** (*Función localmente positiva*) Sea  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ .  $V$  es localmente definida positiva si  $\epsilon > 0$  y  $\alpha_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad V(z, t) \geq \alpha_0(\|z\|) \quad \forall z \in B, \quad \forall t \geq 0$$

**Definición 3.5** (*Función definida positiva (fdp)*) Sea  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida positiva si satisface las condiciones de la **Definición 3.4** y, además  $\alpha_0(h) \rightarrow \infty$  cuando  $h \rightarrow \infty$ . Para acotar  $V$  por arriba, se define lo siguiente:

**Definición 3.6** (*Función decreciente*) Sea  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función decreciente para algún  $\epsilon > 0$  y para  $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$V(z, t) \leq \alpha_0(\|z\|) \quad \forall z \in B \quad \forall t \geq 0$$

Usando estas definiciones, el siguiente teorema nos permite determinar la estabilidad para un sistema mediante el estudio de la función de energía apropiada. Este teorema establece que cuando  $V(z, t)$  es localmente definida positiva y  $\dot{V}(z, t) \leq 0$ , entonces se concluye que el punto de equilibrio  $z^*$  es estable. La derivada temporal de  $V$  se toma a lo largo de las trayectorias de el sistema:

$$\dot{V} \Big|_{\dot{z}=f(z,t)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} f$$

**Teorema 3.1** (*Teorema básico Lyapunov*) Sea  $V(z, t)$  una función no negativa con deriva  $\dot{V}$  a lo largo de las trayectorias del sistema,

1. Si  $V(z, t)$  es localmente definida positiva y  $\dot{V}(z, t) \leq 0$  localmente en  $z$ , y para todo  $t$  entonces el origen del sistema es localmente estable ( en el sentido de Lyapunov.)
2. Si  $V(z, t)$  es localmente definida positiva y decreciente, y  $\dot{V}(z, t) \leq 0$  localmente en  $z$ , y para todo  $t$ , entonces el origen del sistema es uniformemente localmente estable (en el sentido de Lyapunov)
3. Si  $V(z, t)$  es localmente definida positiva y decreciente, y  $-\dot{V}(z, t)$  es localmente definida positiva, entonces el origen del sistema es uniformemente localmente asintóticamente estable.
4. Si  $V(z, t)$  es definida positiva y decreciente, y  $-\dot{V}(z, t)$  es definida positiva, entonces el origen es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

Una función  $V(z, t)$  que cumpla con las condiciones impuestas en el método directo de Lyapunov, se denomina Función de Lyapunov. Este método es una herramienta de análisis muy poderosa. Sin embargo, presenta dos desventajas. La primera es que no hay un método sistemático para hallar una función de Lyapunov, por lo tanto hay que proponer una función candidata de Lyapunov y probar si la misma cumple con los requisitos de estabilidad. La segunda es que el teorema solo brinda condiciones suficientes por lo tanto el hecho de no encontrar una función candidata a Lyapunov que satisfaga las condiciones de estabilidad o de estabilidad asintótica no significa que el origen es inestable o asintóticamente estable.

### 3.3.2. Descripción del sistema, principales suposiciones y restricciones.

Considera el sistema no lineal

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u \\ x(0) &= x_0, t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

donde  $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  es el vector de estado y  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control a ser diseñada.

Se supone que las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones suaves e inciertas, y están delimitadas para todas las  $x \in \mathcal{X}$ ; además,  $f(x)$  contiene términos de perturbaciones no medibles y  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathcal{X}$ .

El objetivo de control consiste en forzar a la función continua  $\sigma(x, t)$ , llamada variable deslizante, a 0. Suponiendo que  $\sigma$  admite el grado relativo igual a 1 con respecto a  $u$ , uno consigue

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(x, t) &= \left( \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} + \\ &\left( \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} \right)^T f(x) + \left( \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} \right)^T g(x)u = \Psi(x, t) + \Gamma(x, t)u \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &:= \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} + \left( \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} \right)^T f(x) \\ \Gamma(x, t) &:= \left( \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} \right)^T g(x) \end{aligned}$$

Las funciones  $\Psi(x, t)$  y  $\Gamma(x, t)$  se suponen acotadas de tal manera que par todo  $x \in \mathcal{X}$  y todo  $t \geq 0$

$$|\Psi(x, t)| \leq \Psi_M, 0 < \Gamma_m \leq \Gamma(x, t) \leq \Psi_M \quad (3.11)$$

Se asume que  $\Psi_M$ ,  $\Gamma_m$  y  $\Gamma_M$  existen pero no se conocen. El objetivo para un diseñador es proponer un controlador de superficie deslizante  $u(\sigma, t)$  con las mismas características de un CMD clásico, es decir, robusto y con un tiempo de convergencia finito pero sin ninguna información de las incertidumbres o perturbaciones (aparecidas en  $f(x)$  y esta última es solo conocida para ser acotada). Además, el objetivo permite asegurar la estabilidad global del sistema en lazo cerrado mientras que la forma clásica (sin conocimiento de incertidumbres acotadas) sólo asegura su estabilidad semi-global.

### 3.3.3. Modos Deslizantes Real e Ideal

A continuación, las definiciones de modos deslizantes ideal y real son recordadas.

**Definición 3.7** [51] *Se dice que un modo deslizante ideal existe si*

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \dot{\sigma} < 0 \quad y \quad \lim_{\sigma \rightarrow -0} \dot{\sigma} > 0$$

En aplicaciones reales, un modo deslizante *ideal*, como se define en la Definición (3.7), no puede establecerse. Entonces, es necesario introducir el concepto de modo deslizante *real*.

**Definición 3.8** [16, 51] Si, debido a algún parámetro pequeño positivo  $\mu$ , el estado de trayectoria satisface

$$|\sigma(t)| \leq \Delta(\mu), \lim_{\mu \rightarrow 0} \Delta(\mu) = 0$$

entonces el movimiento es llamado **modo deslizante real**.

Como esto es común es la Teoría de Modos Deslizantes [42], consideraremos la acción de control discontinua  $u = u(\sigma, t)$  al tiempo  $t$  como

$$u(\sigma, t) = -K(t)\text{sign}(\sigma)$$

$$\text{sign}(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma > 0 \\ -1 & \text{si } \sigma < 0 \\ \in [-1; 1] & \text{si } \sigma = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

### 3.4. Primera ley de Control Adaptable por Modos Deslizantes

Considere el controlador (3.12) con la ganancia  $K(t)$  definida como se muestra a continuación:

- Si  $|\sigma(x(t), t)| > \epsilon > 0$ , entonces  $K(t)$  es la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{K}(t) = \bar{K}_1 |\sigma(x(t), t)| \quad (3.13)$$

con  $\bar{K}_1 > 0$  y  $K(0) > 0$ ;

- Si  $|\sigma(x(t), t)| \leq \epsilon$ , entonces  $K(t)$  se lee como

$$\begin{aligned} K(t) &= \bar{K}_2 |\eta(t)| + \bar{K}_3 \\ \tau \dot{\eta}(t) + \eta(t) &= \text{sign}(\sigma(x(t), t)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

con  $\bar{K}_2 = K(t^*)$ ,  $\bar{K}_3 > 0$  y  $\tau > 0$ , donde  $t^*$  es el valor más grande de  $t$  tal que

$$|\sigma(x(t^* - 0), t^* - 0)| > \epsilon, |\sigma(x(t^*), t^*)| \leq \epsilon$$

Obviamente, este controlador está basado en el concepto de modo deslizante real. Suponiendo que

$$|\sigma(x(0), 0)| > \epsilon$$

la ley de control adaptable por modos deslizantes (3.13)-(3.14) trabajan de la siguiente forma:

- La ganancia  $K(t)$  se incrementa a partir de la ley adaptable (3.13) sobre un valor suficientemente grande para contrarrestar las incertidumbres acotadas con desconocimiento de cotas en (3.9) hasta que inicie la superficie deslizante. Denote el instante de tiempo cuando la superficie deslizante inicia por primera vez como  $t_1$ .

- Cuando la superficie deslizante ha comenzado, es decir,

$$|\sigma(x(t), t)| \leq \epsilon$$

de  $t = t_1$ ,  $K(t)$  se obtiene la ganancia de adaptación (3.14). Nota que esta estrategia permite el decremento de la ganancia y así ajustar con respecto a las perturbaciones e incertidumbres actuales.

- Sin embargo, si la variación de incertidumbres y perturbaciones excede el valor  $\bar{K}_2 = K(t_1)$ , entonces el modo deslizante real no se establece y tendremos que

$$|\sigma(x(t), t)| > \epsilon$$

- Entonces, la ganancia adaptable se vuelve a resolver de acuerdo con (3.13). La ganancia  $K(t)$  se incrementará hasta que la superficie deslizante ocurra nuevamente en el instante de tiempo  $t_2$ .
- Una vez que ocurre el modo deslizante,  $|\sigma(x(t), t)| \leq \epsilon$  inicia en  $t = t_2$ ,  $K(t)$  ahora sigue la ley de ganancia adaptable (3.14) con  $K_2 = K(t_2)$ .

El siguiente teorema confirma la funcionalidad de la Primera Ley de Control Adaptable por modos deslizantes (3.13)-(3.14).

**Teorema 3.2** ([44]). *Dado que el sistema no lineal con incertidumbre (3.9) con la variable deslizante  $\sigma(x(t), t)$  satisface (3.10), controlado por (3.12), (3.13) y (3.14), existe un tiempo finito  $t_F$  tal que un modo deslizante real es establecido para todo  $t \geq t_F$ , es decir,  $|\sigma(x(t), t)| \leq \epsilon$  para todo  $t \geq t_F$ .*

## 3.5. Segunda Ley de Control Adaptable por Modos Deslizantes.

La primera ley de Control adaptable por modos deslizantes (3.12), (3.13) y (3.14) usa el concepto de "control equivalente" [36]. Esto puede obtenerse por un filtro pasa bajas, aunque no es fácil sintonizar su parámetro. El control presentado a continuación no estima las cotas de perturbaciones o incertidumbres. Pero hay un inminente precio para esto: la nueva estrategia garantiza sólo un modo deslizante real.

Considere el siguiente controlador (3.12)

$$u(\sigma, t) = -K(t) \text{sign}(\sigma(x(t), t))$$

donde la ganancia  $K(t)$  satisface

$$\dot{K} = \begin{cases} \bar{K} |\sigma(x(t), t)| \text{sign}(|\sigma(x(t), t)| - \epsilon) & \text{si } K > \mu \\ 0 & \text{si } K \leq \mu \end{cases} \quad (3.15)$$

con  $\bar{K} > 0$ ,  $\epsilon > 0$  y un valor positivo suficientemente pequeño para  $\mu$ . El parámetro  $\mu$  se introduce a fin de obtener sólo valores positivos para  $K$ .

Una vez que el modo deslizante con respecto a  $\sigma(x(t), t)$  se establece, la ley de ganancia adaptable propuesta (3.15) permite a la ganancia  $K$  disminuir (cuando  $|\sigma(x(t), t)| < \epsilon$ ). En otras palabras, la ganancia  $K$  se mantendrá en el valor más pequeño que permita una precisión dada de  $\sigma$ -estabilización. Por supuesto, como se describe, esta ley adaptable permite obtener una ganancia adecuada con respecto a la magnitud de perturbaciones e incertidumbres.

Primero, probemos el siguiente resultado auxiliar.

**Lema 3.1** *Dado el sistema no lineal con incertidumbres (3.9) con la variable deslizante dinámica  $\sigma(x(t), t)$  (3.10) controlado por (3.12) y (3.15), la ganancia  $K(t)$  tiene una cota superior, es decir, existe una constante positiva  $K^*$  tal que  $K(t) \leq K^*$  para todo  $t \geq 0$ .*

**Prueba 3.1** *Supongamos que  $|\sigma(x(0), 0)| \geq \epsilon$ . De  $K$ -dinámica (3.15) y dado que las funciones  $\Psi$  y  $\Gamma$  son acotadas, sigue que  $K$  se está incrementando y existe un tiempo  $t_1$  (véase Figura 3.8) tal que*

$$K(t_1) = \left| \frac{\Psi(t_1)}{\Gamma(t_1)} \right|$$

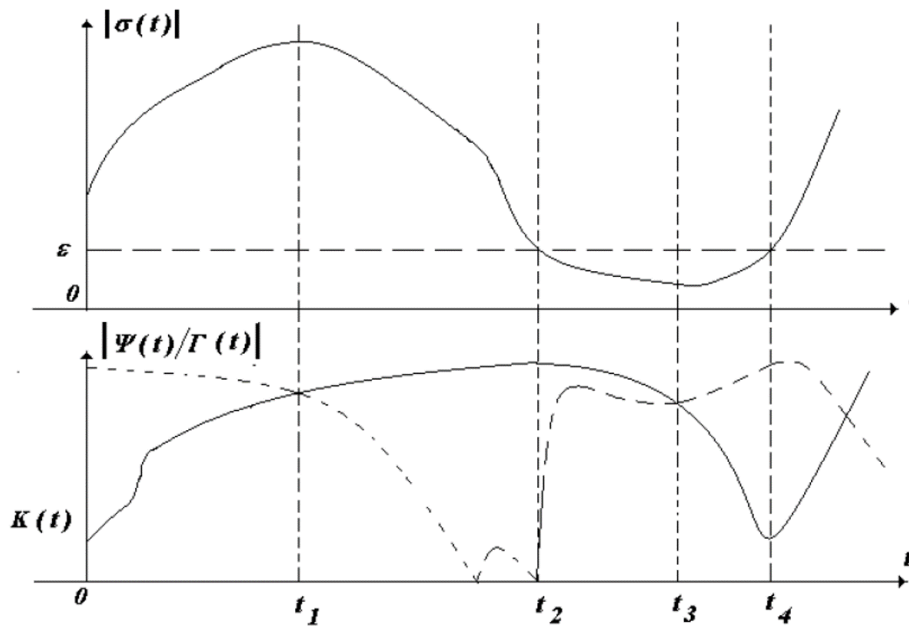


Figura 3.8: Esquema descriptivo del comportamiento de  $\sigma$  (arriba) y  $K$  (abajo) contra el tiempo.

De  $t = t_1$ , dando  $K$ -dinámica (3.15), la ganancia  $K$  es lo suficientemente grande para hacer decrecer la variable de deslizamiento. Entonces, esto significa que, en un tiempo finito  $t_2$  (3.9),  $|\sigma(x(t), t)| < \epsilon$ . Esto conlleva a que la ganancia  $K$  decrezca de  $t_2$ , teniendo un valor máximo en  $t = t_2$ . De  $K$ -dinámica (3.15), esto lleva a que exista un instante de tiempo  $t_3 > t_2$  tal que

$$K(t_3) = \left| \frac{\Psi(t_3)}{\Gamma(t_3)} \right|$$

De  $t = t_3$ , la ganancia  $K$  no es lo suficientemente grande para contrarrestar la perturbación e incertidumbre. Esto conlleva a que exista un instante de tiempo  $t_4 > t_3$  tal que

$$|\sigma(x(t_4), t_4)| \geq \epsilon$$

El proceso se reinicia desde el principio. Para la ley de adaptación (3.15), la ganancia  $K(t_i)$  permanece uniformemente acotada en  $t_i$ . En efecto

$$K(t_i) = \left| \frac{\Psi(t_i)}{\Gamma(t_i)} \right| \leq \frac{\Psi^{**}}{\Gamma^{**}} := K^{**}$$

y, aquí, siempre existe una constante finita  $K^*$  tal que  $K^* < K^{**}$ , la cual provee el resultado deseado.

**Teorema 3.3** ([44]). *Dado el sistema no lineal con incertidumbres (3.9) con la variable de deslizamiento dinámica  $\sigma(x(t), t)$  (3.10) controlada por (3.12) y (3.15), existe un tiempo finito  $t_F$  tal que un modo deslizante es establecido para todo  $t \geq t_F$ , es decir*

$$|\sigma(x(t), t)| < \delta$$

para todo  $t \geq t_F$  con

$$\delta = \sqrt{\epsilon^2 + \frac{\Psi_M^2}{\bar{K}\Gamma_m}} \quad (3.16)$$

**Prueba 3.2** *La prueba está basada en la aproximación de Lyapunov y muestra que cuando  $|\sigma(x(t), t)| > \epsilon$  la estrategia de control asegura que  $|\sigma(x(t), t)| \leq \epsilon$  en tiempo finito. Además, esta comprobado que tan pronto como  $\sigma$  alcanza el dominio  $|\sigma(x(t), t)| \leq \epsilon$ , este se mantiene en el dominio  $|\sigma(x(t), t)| \leq \delta$  definido por (3.16) para todo tiempo posterior. De forma que, la prueba muestra que el modo deslizante real es establecido en tiempo finito en el dominio  $|\sigma(x(t), t)| \leq \delta$ . Considere la siguiente función candidata Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2\gamma}(K - K^*)^2, \gamma > 0 \quad (3.17)$$

Entonces uno tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma\Psi - \sigma\Gamma K \text{sign}(\sigma) + \frac{1}{\gamma}(K - K^*)|\sigma| \text{sign}(|\sigma| - \epsilon) \leq \\ &|\sigma|\Psi_M - |\sigma|\Gamma_m K + \frac{1}{\gamma}(K - K^*)\bar{K}|\sigma| \text{sign}(|\sigma| - \epsilon) = \\ &|\sigma|(\Psi_M - \Gamma_m K^*) + (K - K^*) \left( -\Gamma_m|\sigma| + \frac{\bar{K}}{\gamma}|\sigma| \text{sign}(|\sigma| - \epsilon) \right) \end{aligned}$$

Por el lema (2.1) siempre existe  $K^* > 0$  tal que  $K(t) - K^* \leq 0$ , entonces para algún  $\beta_K > 0$  sigue

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\beta_\sigma |\sigma| - \beta_K |K - K^*| - \xi \\ \xi &:= |K - K^*| \left( \Gamma_m |\sigma| + \frac{\bar{K}}{\gamma} |\sigma| \text{sign}(|\sigma| - \epsilon) - \beta_K \right) \\ \beta_\sigma &:= (\Gamma_m K^* - \Psi_M) > 0 \end{aligned}$$

que resulta para

$$\dot{V} \leq -\beta \sqrt{V} - \xi \quad (3.18)$$

donde

$$\beta := \sqrt{2} \min\{\beta_\sigma; \beta_K \sqrt{\gamma}\}$$

**Caso 1:**  $|\sigma| > \epsilon$ . En este caso es posible obtener  $\xi > 0$  seleccionando  $\gamma$

$$\frac{\bar{K}}{\Gamma_m + \beta_K \epsilon^{-1}} > \gamma$$

que proporciona

$$-\Gamma_m |\sigma| + \frac{\bar{K}}{\gamma} |\sigma| - \beta_K > 0$$

para todo  $\sigma$  satisfaciendo  $|\sigma| > \epsilon$ . De (3.18) obtenemos

$$\dot{V} \leq -\beta \sqrt{V} - \xi \leq -\beta \sqrt{V}$$

De tal forma que, la convergencia en tiempo finito hacia  $|\sigma| \leq \epsilon$  es garantizada para cualquier condición inicial que satisfaga  $|\sigma(x(0), 0)| > \epsilon$ .

**Caso 2:**  $|\sigma| < \epsilon$ . En este caso la función  $\xi$  en (3.18) puede ser negativa. Esto significa que  $V$  podría ser de signo indefinido, por lo que no es posible para concluir la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Entonces  $|\sigma|$  puede incrementarse sobre  $\epsilon$ . Tan pronto como  $|\sigma|$  empiece a crecer más que  $\epsilon$ , regresamos al caso previo y  $V$  comienza a decrecer. Aparentemente, el decrecimiento de  $V$  puede ser alcanzado por el incremento de  $K$  permitiendo que  $|\sigma|$  se incremente antes de empezar el decrecimiento a  $|\sigma| \leq \epsilon$ . Sin pérdida de generalidad, estimemos el caso cuando  $\sigma(x(0), 0) = \epsilon^+$  y  $K(0) > 0$ : considerando el “peor” caso (con respecto a perturbaciones e incertidumbres), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \Psi_M - K \Gamma_m \\ \dot{K} &= \bar{K} |\sigma| = \bar{K} \sigma \end{aligned}$$

llevando a



$$\begin{aligned}\sigma(x(t), t) &= \epsilon^+ \cos\left(\sqrt{\bar{K}\Gamma_m t}\right) + \frac{\Psi_M - \bar{K}\Gamma_m}{\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}} \sin\left(\sqrt{\bar{K}\Gamma_m t}\right) \\ K(t) &= \epsilon^* \sqrt{\frac{\bar{K}}{\Gamma_m}} \sin(\bar{K}\Gamma_m t) + \left(K(0) - \frac{\Psi_M}{\Gamma_m}\right) \cos(\bar{K}\Gamma_m t) + \frac{\Psi}{\Gamma_m}\end{aligned}$$

Tomando que  $\epsilon \rightarrow \epsilon$ , para  $\delta = \max \sigma(x(t), t)$  (la maximización es tomada para todo  $t$  dentro del intervalo considerado), obtenemos (3.16). El Teorema es probado.

Por lo que, la convergencia en el dominio  $|\sigma| \leq \epsilon$  está en un tiempo finito pero podría ser sustraída en un dominio más grande  $|\sigma| \leq \delta$ . Así el modo deslizante real existe en el dominio  $|\sigma| \leq \delta$ .

### 3.5.1. Análisis de Estabilidad para la ley Adaptable

Con el Acrobot presentado en la forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + b(t, x(t))u(t, x(t)) \quad (3.19)$$

tomando en cuenta que

$$\begin{aligned}x(t) &\in \mathbb{R}^n & , & \quad f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} & , & \quad b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

por lo que se supone que el control  $u = u(t, x)$  esfuerza al modo deslizante en alguna superficie  $s(x) = 0$  ( $s \in C^1$ ) y está en la forma  $u(s, t) = -K(t) \text{sign}(s(x(t), t))$  con la ganancia de la ley adaptable (3.15), esto significa que la superficie deslizante  $s(x) = 0$  es alcanzada en tiempo finito  $t_f$ . Basado en el teorema donde el CMD es establecido para todo  $t \geq t_f$

$$|s(x(t), t) < \delta| \quad \text{con} \quad \delta = \sqrt{\epsilon^2 + \Psi_p^2 / \bar{K}\Gamma_p} \quad (3.20)$$

donde  $\Psi$  y  $\Gamma$  son funciones acotadas para  $\alpha = 1 - \epsilon_0$  donde  $\epsilon_0$  es un número pequeño positivo. El procedimiento de adaptación sugerido provee  $K(t)$  tendiendo a la vecindad del mínimo valor posible  $k_{min}$ , que es

$$\begin{aligned}K(t) &:= \begin{cases} \frac{1}{1 - \epsilon_0} k_{min}(t) & \text{si } k_{min}(t) \geq \epsilon \\ \epsilon & \text{si } k_{min}(t) < \epsilon \end{cases} \\ k_{min}(t) &:= \frac{|\Phi(t, x(t))|}{1 + \lambda \sqrt{\|x(t)\|^2 + \epsilon}}\end{aligned} \quad (3.21)$$

satisfaciendo

$$|\Phi(t, x(t))| := \frac{\nabla^T s(x) f(t, x)}{\nabla^T s(x) b(t, x)}$$

## **Conclusión**

En éste capítulo se trataron los conceptos fundamentales para entender el funcionamiento de sistemas de control basados en ASMC. La metodología adaptable es desarrollada para encontrar la ganancia del CMD proporcionando un valor mínimo de discontinuidad resultando en una minimización del efecto del chattering. También se presentó el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov, y sus respectivas condiciones para diferentes tipos de estabilidad. Finalmente se mostraron los pasos para la elaboración de las leyes de control del ASMC.

# Capítulo 4

## Formulación del Problema

El sistema Péndulo tipo Acrobot sobre un carro es un mecanismo planar con dos eslabones rígidos unidos entre sí a través de juntas de revoluta y montados en una plataforma móvil rígida no accionada. Sólo hay un actuador que proporciona la entrada de par en la segunda articulación del péndulo, ya que es una configuración de Acrobot. Dicho sistema se toma desde un marco de referencia acelerado correspondiente al carro, al cual se encuentra fijo el Acrobot. En este capítulo se propone el modelado de un sistema tipo péndulo en un sistema de referencia no inercial, mediante el teorema de Kőning y las bien conocidas ecuaciones de Lagrange. Además, se desarrollan dos leyes de control para estabilización de posición (postura invertida) del robot, por medio del ASMC-Segunda Ley. Por último, se estudia la estabilidad de dos metodologías adaptables.

### 4.1. Acrobot sobre un carro en un marco referencial no inercial

A continuación se presenta el péndulo Acrobot sobre un carro en un marco referencial no inercial, es decir, marco referencial acelerado:

#### 4.1.1. Modelo dinámico: ecuaciones de energía y ecuaciones de Lagrange.

Para desarrollar el modelo matemático del Acrobot sobre un carro, se tendrán en cuenta los siguientes supuestos: todos los elementos sólidos son rígidos, el sistema no tiene fricción y el efecto de la gravedad es vertical con respecto al plano de movimiento. El sistema tiene tres grados de libertad (uno traslacional y dos rotacionales). Sin embargo el desplazamiento traslacional se considera como parte de los efectos no inerciales del sistema; limitados a moverse sólo horizontalmente debido a sus juntas mecánicas y en el caso de los eslabones del Acrobot, a girar sobre sus respectivos ejes. Sin embargo, los desplazamientos angulares y traslacionales del Acrobot no están restringidos, es decir, ni los radios de giro ni la distancia de desplazamiento están limitados; el carro no tiene motor, pero cualquier aceleración inducida a través del carro transmitirá fuerzas de reacción (efecto no inercial) en la dinámica del Acrobot. El modelo toma en consideración solo las masas y los momentos de inercia del Acrobot, y omite la dinámica del carrito ya que el interés de estudio del

modelo matemático radica en los efectos no inerciales sobre el Acrobot.

Considere el sistema Acrobot sobre un carro con aceleración horizontal constante  $\bar{w}$ , representado en la Figura 4.1, con los parámetros descritos en la Tabla 4.1; donde la dinámica del Acrobot se ve afectada por el movimiento del carro, esto significa que el Acrobot está bajo un marco de referencial no inercial.

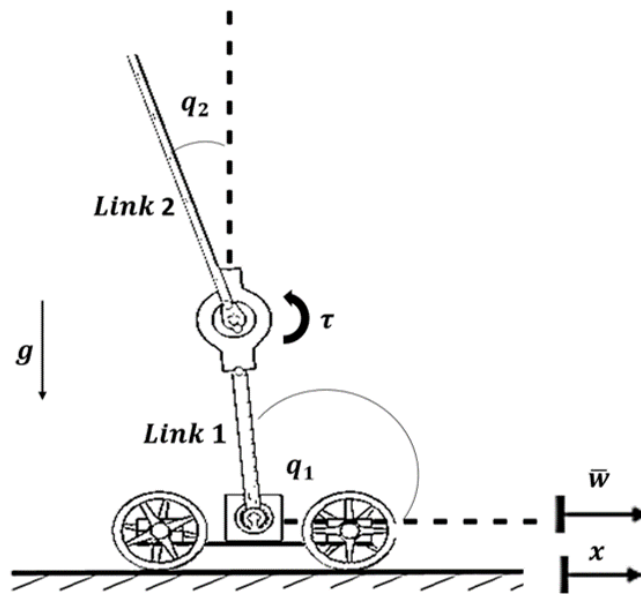


Figura 4.1: Acrobot sobre un carro en un marco referencial no inercial.

Las coordenadas generalizadas para el sistema Acrobot sobre un carro están definidas como:

$$q_1 := \theta_1, q_2 := \theta_2$$

Como puede observarse, el desplazamiento  $\bar{x}$  no se incluye como una coordenada generalizada, esto es así para que durante el desarrollo de las ecuaciones dinámicas, los efectos no inerciales inducidos por la dinámica de  $\bar{x}$ , ya que el carro se comporta como un marco de referencia acelerado, se puedan diferenciar de la dinámica del Acrobot.

Tabla 4.1: Parámetros del sistema Acrobot.

Notación	Descripción
$\bar{w}$	Aceleración horizontal del carro.
$\bar{x}$	Desplazamiento horizontal del carro.
$\theta_1$	Ángulo entre el eje horizontal y el eslabón 1.
$\theta_2$	Ángulo entre la proyección del eslabón 1 y el eslabón 2.
$\tau$	Entrada de control
$m_1, m_2$	Masas del eslabón 1 y 2.
$L_1, L_2$	Longitudes del eslabón 1 y 2.
$l_{c1}, l_{c2}$	Distancia del eje al centro de masa del eslabón 1 y 2.
$\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2$	Tensores de inercia de los eslabones 1 y 2.
$g$	Aceleración gravitacional.
$e$	Vector unitario

La energía cinética  $E_c$  está expresada por el siguiente término:

$$E_c = \sum_{i=1}^2 E_{c_{mi}}$$

donde  $E_c$  se puede calcular aplicando el teorema de Köning,

$$\begin{aligned} E_{c_{mi}} &= E_{c_{mi,\mathcal{O}}} + E_{c_{mi,rot-\mathcal{O}}} + m_i \langle v_{i-CI}, v_{\mathcal{O}} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|v_{\mathcal{O}}\|^2 + \frac{1}{2} \langle \vec{w}_i, \mathbb{I}_{i,\mathcal{O}} \vec{w}_i \rangle + m_i \langle v_{i-CI}, v_{\mathcal{O}} \rangle \end{aligned}$$

El término  $v_{\mathcal{O}}$ , es la velocidad del origen del sistema de coordenadas,  $\mathbb{I}_{i,\mathcal{O}}$  es el tensor de inercia relativo al origen  $\mathcal{O}$  del sistema de coordenadas, y  $v_{i-CI}$  es la velocidad del centro de inercia relativo al origen  $\mathcal{O}$ ;  $m_i$  representa la masa de cada eslabón del mecanismo, y  $\vec{w}_i$  representa la velocidad rotacional de los eslabones del Acrobot. En el caso del Acrobot, la energía cinética está dada por la suma de las energías cinéticas individuales de cada eslabón. Además, para calcular la energía de los eslabones, es necesario tomar en cuenta su componente rotacional. En este sentido, la dirección de las velocidades angulares de los eslabones del Acrobot está representada por el vector unitario  $\mathbf{e} = [0 \ 0 \ 1]^T$  que describe la rotación como ortogonal al plano de movimiento. Por lo tanto, los vectores de las velocidades angulares del Acrobot se definen de la siguiente manera [23]:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &:= \dot{\theta}_1 \mathbf{e} = \dot{q}_1 \mathbf{e} \\ \vec{w}_2 &:= (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \mathbf{e} = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \mathbf{e} \end{aligned}$$

y, los tensores de inercia de cada eslabón, respectivamente, tomando en cuenta que  $l_{c1} = \frac{L_1}{2}$ ,  $l_{c2} = \frac{L_2}{2}$ , quedan descritos como

$$\mathbb{I}_{1,\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} I_{1,xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m_1L_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}_{2,\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} I_{2,xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m_2L_2^2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, podemos calcular cada energía de la siguiente manera

*Energía cinética de  $m_1$*  (Véase Figura 4.2 )

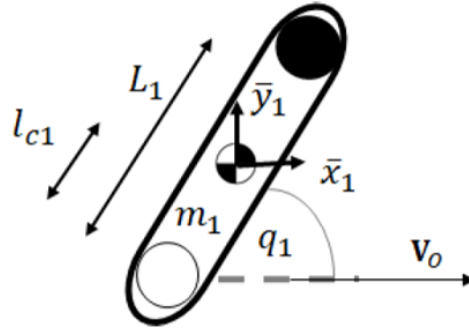


Figura 4.2: Eslabón 1 del Acrobot.

Aplicando el teorema de Kőning,

$$E_{c_{m_1}} = \|v_{\mathcal{O}}\|^2 + \frac{1}{2} \langle \vec{w}_1, \mathbb{I}_{1,\mathcal{O}}\vec{w}_1 \rangle + m_1 \langle v_{1-CI}, v_{\mathcal{O}} \rangle$$

donde

$$\mathbf{v}_{\mathcal{O}} = \dot{\vec{x}}$$

$$\mathbf{v}_{1-CI} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{x}}_1 \\ \dot{\vec{y}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1}\dot{q}_1 \sin(q_1) \\ -l_{c1}\dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_{c_{m_1}} &= \frac{1}{2}m_1 \left( \sqrt{\begin{bmatrix} \dot{\vec{x}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{x}} \\ 0 \end{bmatrix}} \right)^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_1 \mathbf{e}^T) \mathbb{I}_1 (\dot{q}_1 \mathbf{e}) + m_1 \begin{bmatrix} -l_{c1}\dot{q}_1 \sin(q_1) & l_{c1}\dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{x}} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}m_1L_1^2 \right) \dot{q}_1^2 - m_1l_{c1}\dot{\vec{x}}\dot{q}_1 \sin(q_1) \end{aligned}$$

Energía cinética de  $m_2$  (Véase Figura 4.3 )

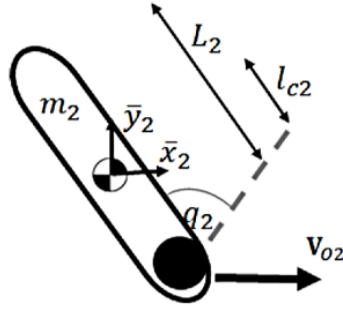


Figura 4.3: Eslabón 2 del Acrobot.

Aplicando el teorema de Köning

$$E_{c_{m_2}} = \|v_{O_2}\|^2 + \frac{1}{2} \langle \vec{w}_2, \mathbb{I}_2 \vec{w}_2 \rangle + m_2 \langle v_{2-CI}, v_{O_2} \rangle$$

donde

$$\mathbf{v}_{O_2} = \begin{bmatrix} \dot{x} - L_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) \\ L_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 - CI = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2) \\ l_{c2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_{c_{m_2}} &= \frac{1}{2} m_2 \left( \sqrt{\begin{bmatrix} \dot{x} - L_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) & L_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} - L_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) \\ L_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix}} \right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \mathbf{e}^T \mathbb{I}_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \mathbf{e} + \\ &\quad m_2 \begin{bmatrix} -l_{c2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2) & l_{c2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} - L_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) \\ L_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 - m_2 L_1 \dot{x} \dot{q}_1 \sin q_1 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{q}_1^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 L_1 l_{c2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) - \\ &\quad m_2 l_{c2} \dot{x} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

de lo anterior se obtiene que,

$$E_c = E_{c_{m_1}} + E_{c_{m_2}} \quad (4.1)$$

La energía potencial del sistema Acrobot está dada por

$$E_p = (m_1 l_{c1} + m_2 L_1)g \sin(q_1) + m_2 l_{c2}g \sin(q_1 + q_2) + cte \quad (4.2)$$

donde  $cte \in \mathbb{R}$ .

Por lo tanto, a partir de la ecuación (4.2) y la ecuación (4.1), se puede aplicar el bien conocido método de Lagrange de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

donde  $\tau_i$  representa las fuerzas generalizadas que actúan en el sistema. Por lo que resulta

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 - \phi\dot{q}_2^2 - 2\phi\dot{q}_1\dot{q}_2 + (h_1 + h_2)g &= \delta_1 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \phi\dot{q}_1^2 + h_2g &= \tau + \delta_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

y cuyos coeficientes son,

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_2 L_1^2 + \frac{1}{3}m_1 l_{c1}^2 + \frac{1}{3}m_2 l_2^2 + 2m_2 L_1 l_{c2} \cos(q_2) \\ m_{12} &= m_{21} = \frac{1}{3}m_2 L_2^2 + m_2 L_1 l_{c2} \cos(q_2) \\ m_{22} &= \frac{1}{3}m_2 L_2^2 \\ \phi &= m_2 L_1 l_{c2} \sin q_2 \\ h_1 &= (m_1 l_{c1} + m_2 L_1) \cos q_1 \\ h_2 &= m_2 l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ \delta_1 &= [(m_1 l_{c1} + m_2 L_1) \sin(q_1) + m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2)]\bar{w} \\ q_2 &= [m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2)]\bar{w} \end{aligned}$$

donde  $\bar{w} = \ddot{x}$ ;  $\tau \in \mathbb{R}$  es la entrada de control del sistema, y  $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$  son los efectos no inerciales inducidos por el movimiento del carro.

La forma matricial del sistema (4.4) puede ser representada como

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = U \quad (4.5)$$

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$  representa el vector de coordenadas generalizadas, y la matriz de inercia se describe como

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{22} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$



La matriz de fuerzas centrípetas y Coriolis se presenta como

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -2\phi_1\dot{q}_2 & -\phi_1\dot{q}_2 \\ \phi_1\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de gravedad está dado por,

$$G(\mathbf{q}) = [(h_1 + h_2)g \quad h_2h]^T$$

El vector de fuerzas generalizadas se presenta de la siguiente manera

$$G(\mathbf{q}) = [\delta_1 \quad \tau + \delta_2]^T$$

#### 4.1.2. Espacio de estados del sistema Acrobot sobre un carro.

Las ecuaciones dinámicas (4.5) se pueden modelar en representación de espacio de estados con respecto a las aceleraciones. Para lograr esto, es necesario asegurarse de que el determinante de  $M$  ( $\det(M)$ ) sea diferente de cero, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \det(M) &= m_{11}m_{22} - m_{12}^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}m_2L_2^2\right) \left(m_2L_2^2 + \frac{1}{3}m_1L_1^2 + \frac{1}{3}m_2L_2^2 + 2m_2L_1l_{c2} \cos(q_2)\right) - \dots \\ &\quad \dots - \left(\frac{1}{3}m_2L_2^2 + m_2L_1l_{c2} \cos(q_2)\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}m_2^2L_1^2L_2^2 + \frac{1}{9}m_1m_2L_1^2L_2^2 + \frac{1}{9}m_2^2L_2^4 + \frac{2}{3}m_2^2L_1L_2^2l_{c2} \cos(q_2) - \\ &\quad \frac{1}{9}m_2^2L_2^4 - \frac{2}{3}m_2^2L_1L_2^2l_{c2} \cos(q_2) - m_2^2L_1^2L_2^2l_{c2}^2 \cos(q_2) \\ &= \frac{1}{3}m_2^2L_1^2L_2^2 + \frac{1}{9}m_1m_2L_1^2L_2^2 - m_2^2L_1^2l_{c2}^2 \cos(q_2) \end{aligned}$$

donde  $l_{c2} = \frac{L_2}{2}$ , entonces

$$\det(M) = m_2^2L_1^2L_2^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cos^2(q_2)\right) + \frac{1}{9}m_1m_2L_1^2L_2^2$$

dado que,  $\cos^2(q_2) \in [0, 1]$ , entonces  $\det(M) > 0$ .

Entonces la ecuación (4.5) se reorganiza y se multiplica por la matriz de inercia inversa  $M^{-1}(q)$ , dando como resultado la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= M^{-1}[U - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - G(\mathbf{q})] \\ &= \begin{bmatrix} \delta_1 + \mu_1 \\ \tau + \delta_2 + \mu_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -\phi_1 \dot{q}_2^2 - 2\phi \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (h_1 + h_2)g \\ \mu_2 &= \phi_1 \dot{q}_1^2 + h_2 g\end{aligned}$$

La matriz inversa  $M^{-1}$  está dada por:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} \\ \bar{m}_{12} & \bar{m}_{22} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{m}_{11} &:= \frac{m_{22}}{m_{11}m_{22} - m_{12}^2} \\ \bar{m}_{12} := \bar{m}_{21} &= \frac{-m_{12}}{m_{11}m_{22} - m_{12}^2} \\ \bar{m}_{22} &:= \frac{m_{11}}{m_{11}m_{22} - m_{12}^2}\end{aligned}$$

Las aceleraciones están dadas, por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= \bar{m}_{11}(\delta_1 + \mu_1) + \bar{m}_{12}(\tau + \delta_2 + \mu_2) \\ \ddot{q}_2 &= \bar{m}_{12}(\delta_1 + \mu_1) + \bar{m}_{22}(\tau + \delta_2 + \mu_2)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Las ecuaciones (4.6) pueden ser reducidas sustituyendo:

$$\begin{aligned}f_1(t, q(t)) &= \bar{m}_{11}(\delta_1 + \mu_1) + \bar{m}_{12}(\delta_2 + \mu_2) \\ f_2(t, q(t)) &= \bar{m}_{12}(\delta_1 + \mu_1) + \bar{m}_{22}(\delta_2 + \mu_2)\end{aligned}$$

Estos términos representan efectos no deseados que actúan en el sistema (4.4). Los efectos no inerciales  $\delta_1, \delta_2$  inducidos por el carro se incluyen como parte de  $f_1, f_2$ . Así

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= f_1(t, q) + \bar{m}_{12}\tau(t) \\ \ddot{q}_2 &= f_2(t, q) + \bar{m}_{22}\tau(t)\end{aligned}$$

El espacio de estados se define de la siguiente manera:

$$x := [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

Por lo tanto, el sistema dinámico, en la representación de espacio de estados está dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_1(t, x(t)) + \bar{m}_{12}\tau(t) \\ f_2(t, x(t)) + \bar{m}_{22}\tau(t) \end{bmatrix}\tag{4.7}$$

## 4.2. Control adaptable

La propuesta de control para el sistema Acrobot sobre un carro en un marco referencial no inercial se basa en la metodología adaptable por modos deslizantes, es decir, el ASMC dando un ajuste adecuado de la magnitud de la discontinuidad del control como en  $s$  dentro de la fase de alcance cuando las trayectorias están fuera de la superficie. El objetivo se basa en estabilizar los estados de posición del Acrobot en la postura invertida, así como las velocidades correspondientes a cada estado, al tiempo que se rechazan los efectos no inerciales no deseados inducidos por el carro en movimiento. Los métodos de control aplicados a los péndulos pueden ser diseñados para cumplir con las tareas de postura y fase de impulso (swing-up), sin embargo el enfoque presentado en esta tesis no toma en consideración la fase de impulso (swing-up), ya que el sistema estará configurado como condición inicial, en la posición invertida:

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right)$$

Para diseñar la ley de control ASMC- Segunda Ley, es necesario definir una variable deslizante, la cual debe tomar en cuenta los estados del Acrobot (4.7). La idea principal de la estrategia de control es que los estados del sistema se deslicen a lo largo de una superficie deslizante, descrita por una variable deslizante, para estabilizar y a su vez rechazar efectos no deseados así como incertidumbres. Esta variable en particular es elegida para que el sistema tenga una respuesta de orden reducida deseable cuando se le restringe a este comportamiento [10]. Por lo tanto, la variable de deslizamiento queda definida como:

$$s := c_1x_1 + c_2x_2 + x_3 + x_4, \quad (4.8)$$

La derivada de la variable deslizante (4.8) es obtenida como:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= f_1(x, t) + f_2(x, t) + c_1x_3 + c_2x_4 + \\ &\quad (\bar{M}_{12} + \bar{M}_{22})\tau(t) \\ &= \varphi(x, t) + c_1x_3 + c_2x_4 + \bar{M}\tau \end{aligned}$$

donde  $\bar{M} = \bar{M}_{12} + \bar{M}_{22}$ , y los efectos no deseados  $f_1(x, t) + f_2(x, t)$  son agrupados en

$$\varphi(x, t) := f_1(x, t) + f_2(x, t)$$

Para lograr la convergencia asintótica de las variables de estado en presencia de un efecto no deseado  $\psi(x, t)$ , es necesario dirigir la variable (4.8) a la estabilidad en tiempo finito a través de una ley de control. Este problema se puede resolver insertando la variable  $s$  en una función candidata Lyapunov. Por lo tanto, la función candidata Lyapunov basada en (4.8) tiene forma:

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2\gamma}(K - K^*)^2, \gamma > 0 \quad (4.9)$$

Para que la variable (4.9) sea estable, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1.  $\dot{V} < 0$  para  $s \neq 0$

$$2. \lim_{|s| \rightarrow \infty} V = \infty$$

La condición (2) se satisface en (4.9). Entonces

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma\Psi - \sigma\Gamma K \text{sign}(\sigma) + \frac{1}{\gamma}(K - K^*)|\sigma| \text{sign}(|\sigma| - \epsilon) \leq \\ &|\sigma|\Psi_M - |\sigma|\Gamma_m K + \frac{1}{\gamma}(K - K^*)\bar{K}|\sigma|(|\sigma| - \epsilon) = \\ &|\sigma|(\Psi_M - \Gamma_m K^*) + (K - K^*) \left( -\Gamma_m|\sigma| + \frac{\bar{K}}{\gamma}|\sigma| \text{sign}(|\sigma| - \epsilon) \right) \end{aligned}$$

Por el lema (2.1) siempre existe  $K^* > 0$  tal que  $K(t) - K^* \leq 0$  y por lo tanto, para algún  $\beta_K > 0$  se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\beta_\sigma|\sigma| - \beta_K|K - K^*| - \xi \\ \xi &:= |K - K^*| \left( \Gamma_m|\sigma| + \frac{\bar{K}}{\gamma}|\sigma| \text{sign}(|\sigma| - \epsilon) - \beta_K \right) \\ \beta_\sigma &:= (\Gamma_m K^* - \Psi_M) > 0 \end{aligned}$$

que resulta en

$$\dot{V} \leq -\beta\sqrt{V} - \xi \quad (4.10)$$

para

$$\beta := \sqrt{2} \min\{\beta_\sigma; \beta_K \sqrt{\gamma}\}$$

Si (4.10) es integrada sobre  $0 \leq t_r \leq t$ , se obtiene

$$V^{1/2}(t) \leq -\frac{1}{2}\beta t + V^{1/2}(0)$$

y si  $V(t)$  alcanza la estabilidad en tiempo finito, entonces  $t_r$  está acotada por

$$t_r \leq \frac{2V^{1/2}(0)}{\beta}$$

Es necesario proponer una ley de control basada en la función deslizante que satisfaga la condición (1) para que el sistema se estabilice. La derivada de (4.9) se calcula como

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(c_1x_3 + c_2x_4 + \psi(t, x) + \bar{m}(\tau)) \quad (4.11)$$

Proponiendo  $\tau(t) = \frac{1}{\bar{m}}(\nu - c_1x_3 - c_2x_4)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s(\psi(t, x) + \nu) = s\psi(t, x) + s\nu \\ &\leq |s|L + s\nu \end{aligned}$$

Seleccionando  $\nu = -K \text{sing}(s)$  con  $K > 0$ , donde

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

Entonces se tiene

$$\dot{V} \leq |s|L - |s|K = -|s|(K - L) \quad (4.12)$$

Considerando la función (4.9), la condición (4.10) se reescribe como

$$\dot{V} \leq -\beta\sqrt{V} - \xi \quad (4.13)$$

Por lo tanto, la ley de control que estabiliza el sistema en tiempo finito es

$$\tau(t) = \frac{1}{\bar{m}}(-K \text{sign}(s) - c_1 x_3 - c_2 x_4) \quad (4.14)$$

## Conclusión

Es este capítulo se presentó el modelado del Sistema Acrobot sobre un carro a través del teorema de Köning y las ecuaciones de Lagrange con respecto de un sistema referencial mecánico no inercial, así como la definición de los efectos no inerciales que se inducen en el sistema. Finalmente se detalló el sistema en espacio de estados, para posteriormente desarrollar el algoritmo de ASMC.



# Capítulo 5

## Resultados de Simulación

En este capítulo se presentan y analizan los resultados adquiridos en las pruebas de simulación realizadas con el software Matlab/Simulink<sup>®</sup>, para el sistema Acrobot sobre un carro en lazo cerrado tanto para el controlador con la metodología correspondiente a la Primera ley de Control por Modos Deslizantes como para la Segunda ley de Control por Modos Deslizantes. Se presentan también los parámetros físicos del sistema, así como las ganancias utilizadas en los controladores para cada caso. Finalmente, se discuten los resultados obtenidos en este trabajo con ambas Leyes de control adaptable.

### 5.1. Comparación de ASMC-Primera ley contra el Control PID

El Acrobot es un mecanismo subactuado de dos grados de libertad con un torque aplicado en la unión de los dos eslabones. De esta forma y considerando el modelo del Acrobot como un modelo humano, es posible simular su movimiento, y presentar su dinámica. El Acrobot sobre un carro es presentado en la Figura 5.2, donde una aceleración constante  $\bar{w}$  es tomada en cuenta, debido al movimiento del carro, lo cual significa que el sistema se encuentra bajo un marco de referencia no inercial. El control del Acrobot en un marco referencial no inercial está basado en el Control Adaptable por Modos Deslizantes, asegurando un ajuste adecuado de la magnitud de la discontinuidad del control como en [12], dentro de la “fase de alcance”, esto es, cuando las trayectorias están fuera de la superficie de deslizamiento.

La estrategia de control consiste en estabilizar la posición de los estados del Acrobot en su forma invertida mientras rechaza los efectos inducidos no deseados con el movimiento del carro, lo cual se logra con la ganancia dinámica de la parte adaptable. Algunas aproximaciones del control robusto para el sistema péndulo invertido se diseñan como un control de conmutación, con una parte que provee el impulso para elevar el péndulo a la posición invertida y que controla el balanceo, sin embargo, para este trabajo no se toma en cuenta la fase de impulso, ya que se fijan las condiciones iniciales indicando la postura de arranque, en donde los eslabones 1 y 2 tendrán la posición invertida:

$$\begin{aligned} x(0) &= (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) \\ &= \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Para diseñar el ASMC es necesario definir la variable de deslizamiento. Como en [23], esta variable toma en cuenta los estados correspondientes a la posición y velocidad del péndulo. Esta variable de deslizamiento, en particular, es elegida para que el sistema tenga una respuesta de orden reducido [52]. La variable de deslizamiento se define como:

$$s := c_1x_1 + c_2x_2 + x_3 + x_4, \quad (5.2)$$

la cual toma en cuenta a todos los estados del Acrobot. Por otra parte, la variable dinámica de deslizamiento es:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= f_1(x, t) + f_2(x, t) + c_1x_3 + c_2x_4 + \\ &\quad (\bar{M}_{12} + \bar{M}_{22})u(t) \\ &= \varphi(x, t) + c_1x_3 + c_2x_4 + \bar{M}\tau \end{aligned}$$

donde  $\bar{M} = \bar{M}_{12} + \bar{M}_{22}$ , y los efectos no deseados  $f_1(x, t) + f_2(x, t)$  son agrupados en

$$\varphi(x, t) := f_1(x, t) + f_2(x, t)$$

El control  $\tau(t)$  debe conducir a la variable deslizante (5.2) a la estabilidad en tiempo finito,

$$\tau(t) = -(1/\bar{M})(u + c_1x_3 + c_2x_4) \quad c_1, c_2 > 0$$

y esto puede ser obtenido con el ASMC considerando:

$$u(s, t) = -K(t) \left( 1 + \lambda\sqrt{\|x\|^2 + \epsilon} \right) \text{sign}(s(x)) \quad (5.3)$$

donde la ganancia  $K(t)$  puede variar en un rango de  $[\eta, K^+]$ ,  $\eta > 0$  es eigenvalor de  $K$ ,  $\lambda \geq \epsilon > 0$ . El parámetro  $\epsilon$  es introducido para obtener solo valores positivos para  $K$ . De modo que el controlador es descrito como:

$$\tau(t) = -\frac{1}{\bar{m}}(K(t) \left( 1 + \lambda\sqrt{\|x\|^2 + \epsilon} \right) \text{sign}(s) + c_3x_3 + c_4x_4) \quad (5.4)$$

con  $c_3, c_4 > 0$ .

Para mostrar el comportamiento del método propuesto en este trabajo, se realizaron simulaciones numéricas para el Péndulo Acrobot. Este control fue probado en el Acrobot sobre un carro con el ASMC usando los parámetros físicos mostrados en la Tabla5.1, además, un control PID fue comparado en él, de la forma

$$P + I\frac{1}{s} + D\frac{N}{1 + N\frac{1}{s}} \quad (5.5)$$

Las condiciones iniciales, en ambos casos, son elegidas en el punto de equilibrio inestable, es decir, posición invertida, tal como se especifica en la ecuación (5.1)



## 5.1. COMPARACIÓN DE ASMC-PRIMERA LEY CONTRA EL CONTROL PID53

Tabla 5.1: Parámetros para la simulación del Péndulo Acrobot sobre un carro del ASMC-Primera ley y el control PID.

Notación	Valor Numérico	Notación	Valor Numérico
$m_1$	0,265kg	$c_1$	1
$m_2$	0,265kg	$c_2$	3
$L_1$	0,206m	g	9,81m/s <sup>2</sup>
$L_2$	0,206m	$\bar{w}$	0,5m/s <sup>2</sup>
$l_{c1}$	0,103m	$I_{1,zz}$	2,3428x10 <sup>-4</sup> kgm <sup>2</sup>
$l_{c2}$	0,103m	$I_{2,zz}$	2,3428x10 <sup>-4</sup> kgm <sup>2</sup>
$\eta$	0,001	$\epsilon$	0,003
$k^+$	3	$\lambda$	3,2
$P$	-0,0115	$c_3, c_4$	1
$I$	-0,0017	$D$	-0,0183

En la Figura 5.1 se presenta el modelo realizado en Simulink del Acrobot sobre un carro para de esa forma asegurar el rendimiento del controlador ASMC, así como con el control PID, para este caso. De modo que, se mantengan los estados del sistema en la posición inicial. Adicionalmente, se aplicó una aceleración constante sobre el carro para inducir un efecto no inercial sobre el sistema, esta aceleración tiene una magnitud de  $5m/s^2$ .

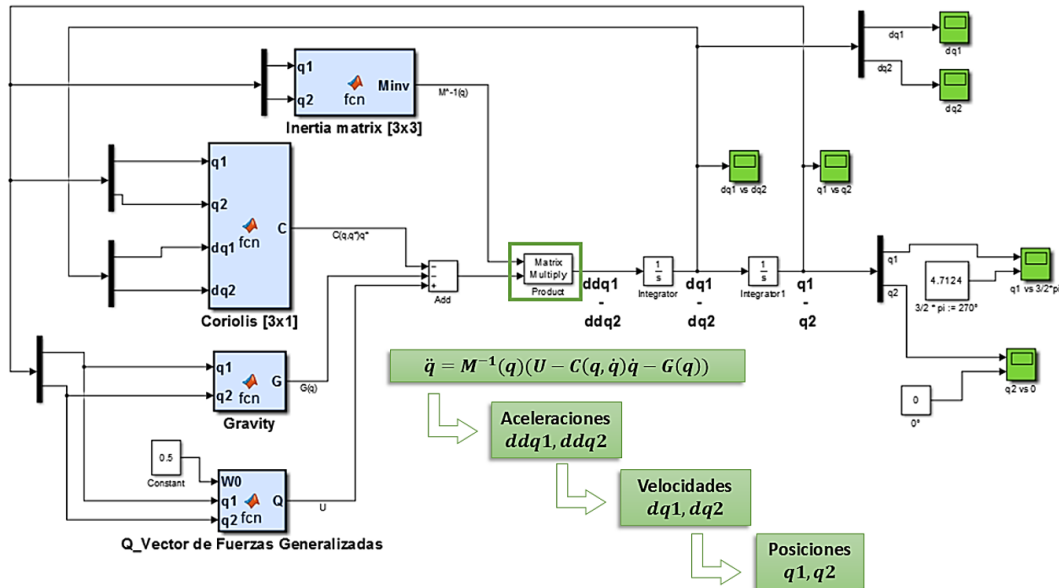


Figura 5.1: Modelo de Matlab-Simulink del Acrobot sobre un carro.

El ASMC estabiliza los estados  $x_1$ , correspondiente al primer eslabón y  $x_2$ , que corresponde al segundo eslabón, en las posiciones deseadas, de modo que en las Figuras 5.2 y 5.3, respectivamente, se presentan sus comportamientos.

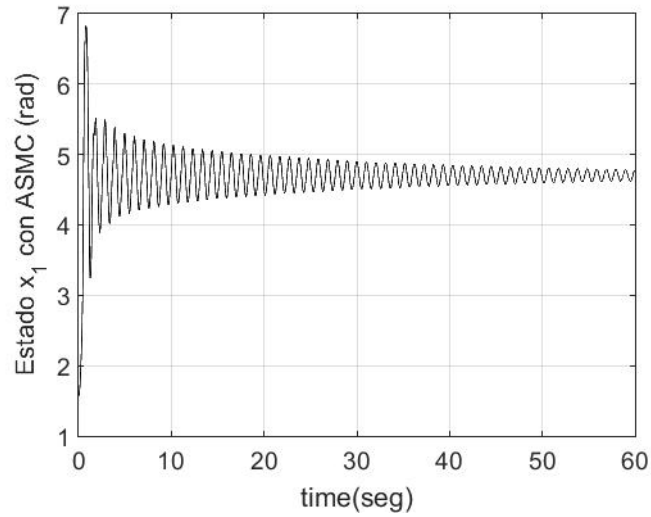


Figura 5.2: Respuesta del estado  $x_1$  con ASMC-Primera Ley del Acrobot sobre un carro.

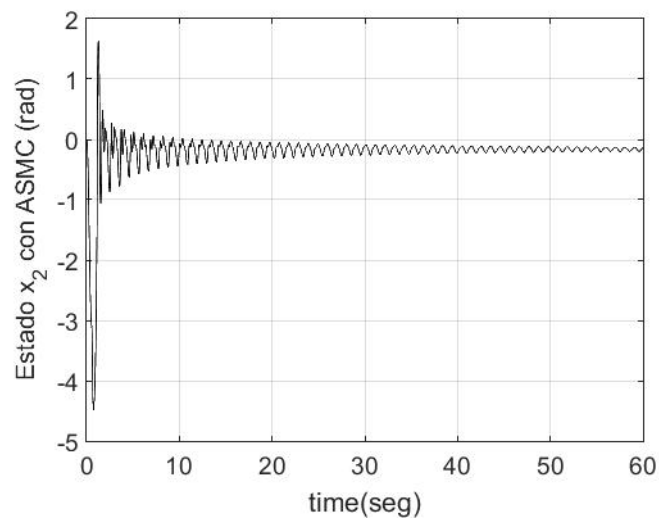


Figura 5.3: Respuesta del estado  $x_2$  con ASMC-Primera Ley del Acrobot sobre un carro.

## 5.1. COMPARACIÓN DE ASMC-PRIMERA LEY CONTRA EL CONTROL PID<sup>55</sup>

Tanto el estado  $x_1$  como el estado  $x_2$  cumplen con las condiciones iniciales. Respecto al estado  $x_1$  se aprecia que se estabiliza muy cerca de 4,7124 radianes o  $\frac{3\pi}{2}$ , es decir,  $270^\circ$ , lo cual significa que el primer eslabón da algunas vueltas antes de alcanzar el punto deseado y el estado  $x_2$  se encuentra cerca de los 0 radianes, lo que físicamente representa varios movimientos previos a la posición invertida, mientras que los estados correspondientes a las velocidades angulares  $x_3$  y  $x_4$  se presentan en la Figura 5.4.

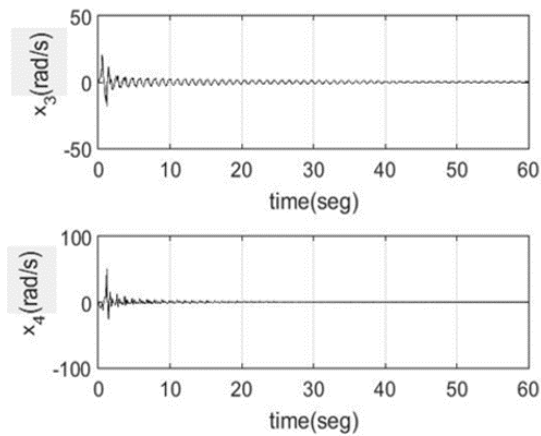


Figura 5.4: Respuesta de los estados  $x_3$  y  $x_4$  con el ASMC-Primera Ley del Acrobot sobre un carro.

El error a la respuesta del estado  $x_1$ , es decir, el correspondiente a la posición angular del eslabón 1, se presenta en la Figura 5.5

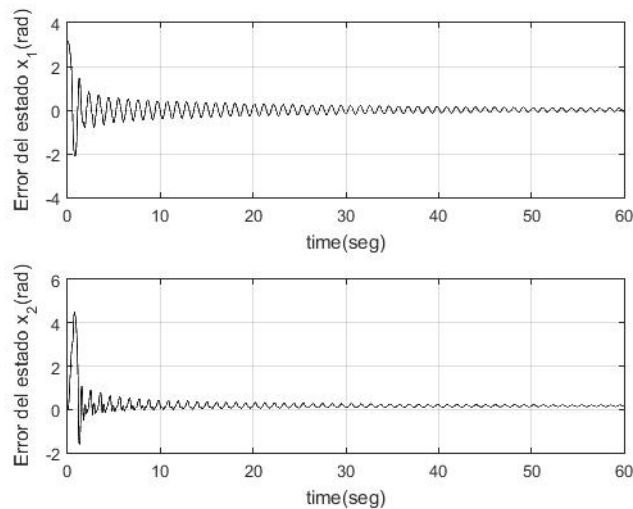


Figura 5.5: Respuesta del error de los estados  $x_1$  y  $x_2$  con ASMC-Primera Ley del Acrobot sobre un carro.

en la parte superior, mientras que en la parte inferior, se muestra el error correspondiente al estado del segundo eslabón,  $x_2$ . La respuesta de la señal de control del ASMC respecto al comportamiento del sistema es mostrada en la Figura 5.6

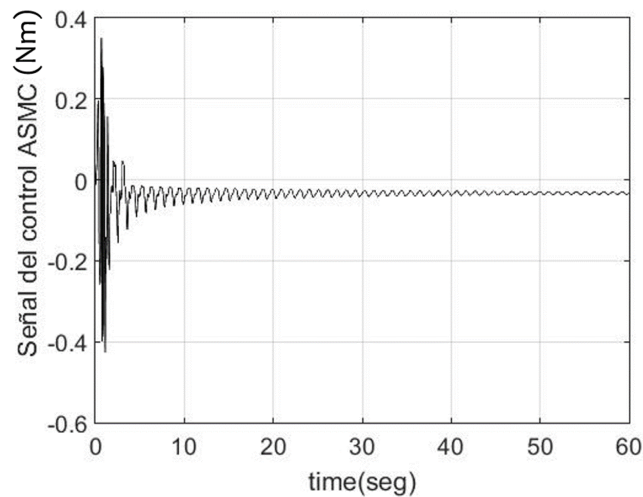


Figura 5.6: Respuesta de la señal del control ASMC-Primera Ley del Acrobot sobre un carro.

Por otra parte y como objeto de demostración de la robustez del ASMC frente a otro control, se eligió el control clásico PID en su forma paralela. La respuesta de los estados  $x_1, x_2, x_3$ , y  $x_4$  que corresponden a las posiciones angulares y las velocidades angulares del Acrobot sobre un carro se pueden apreciar en la Figuras 5.7, respectivamente.

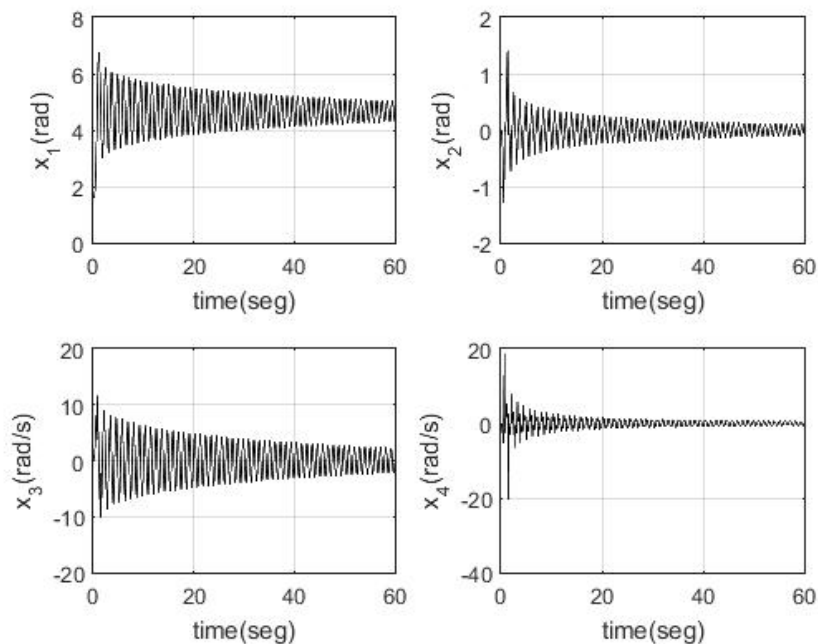


Figura 5.7: Respuesta de los estados del Acrobot sobre un carro con el control PID.

La respuesta del error del estado  $x_1$  aplicando el control PID se ve en la Figura 5.8 en la parte superior, mientras que en la parte inferior se ve el error correspondiente al estado  $x_2$ .

## 5.1. COMPARACIÓN DE ASMC-PRIMERA LEY CONTRA EL CONTROL PID<sup>57</sup>

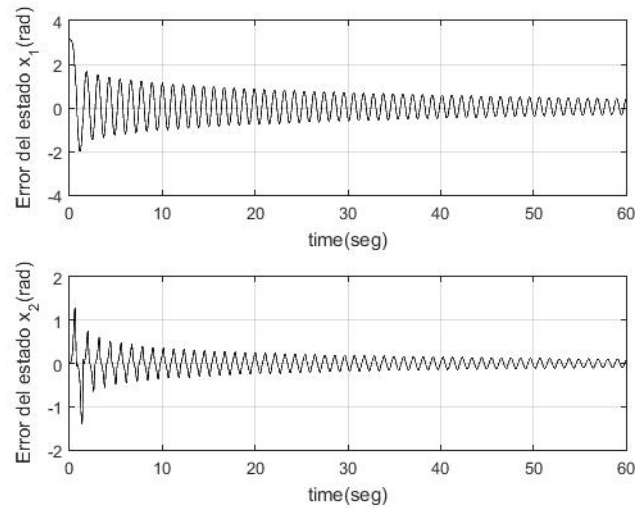


Figura 5.8: Respuesta del error de los estados  $x_1$  y  $x_2$  con el control PID del Acrobot sobre un carro.

La respuesta de la señal de control PID se puede apreciar en la Figura 5.9.

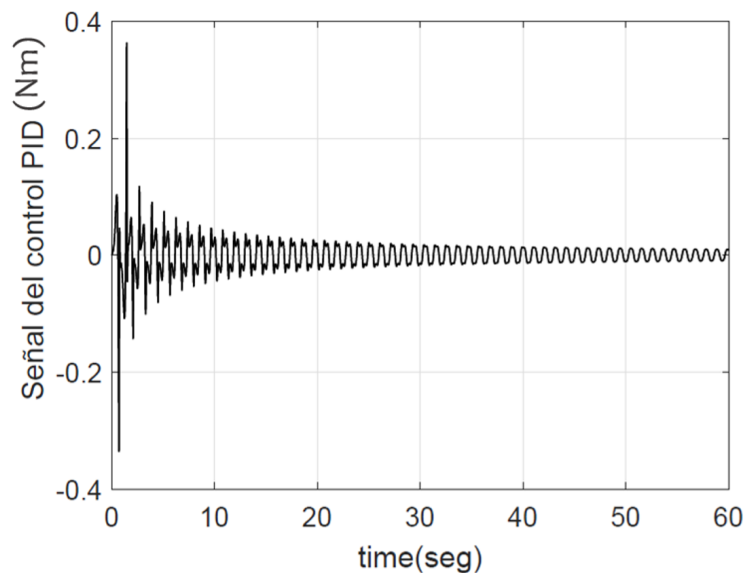


Figura 5.9: Respuesta de la señal del control PID del Acrobot sobre un carro.

Con las Figuras previas, se realizó una comparación del uso de los controladores ya mencionados. Es por ello que, en la Figura 5.10, se presenta la respuesta del estado  $x_1$  cuando el ASMC es aplicado, así como con el control PID. En ella se aprecia la robustez del control elegido frente a la comparación realizada con el control PID. Lo mismo se hizo para el estado  $x_2$  (véase Figura 5.11).

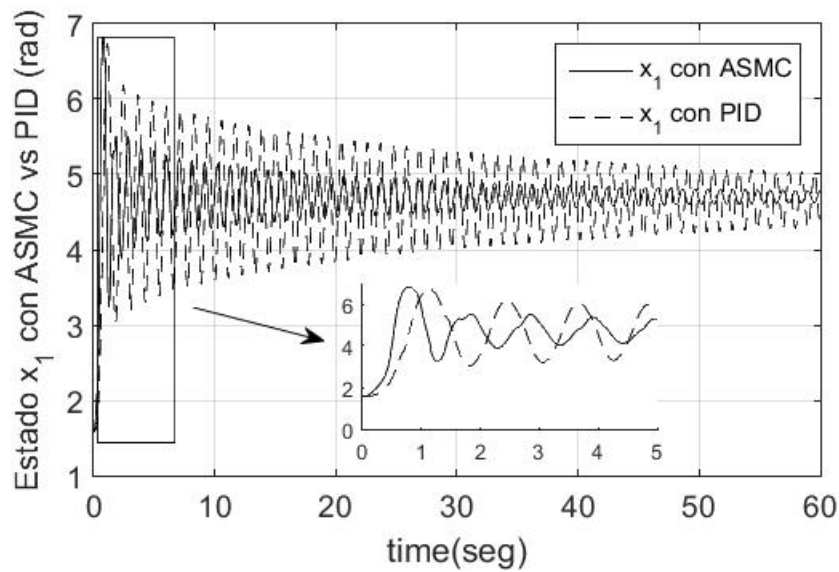


Figura 5.10: Comparación de la respuesta del estado  $x_1$  aplicando el ASMC-Primera Ley y el control PID al péndulo Acrobot sobre un carro.

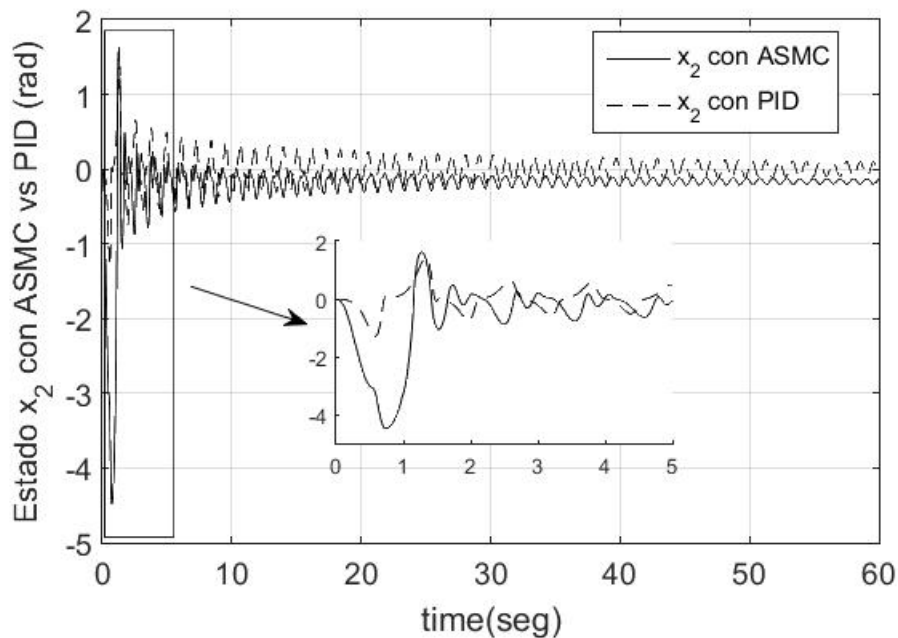


Figura 5.11: Comparación de la respuesta del estado  $x_2$  aplicando el ASMC-Primera Ley y el control PID al péndulo Acrobot sobre un carro.

## 5.2. Comparación del ASMC-Segunda ley contra el CMD

Para que el comportamiento del método propuesto en esta tesis sea comprobado contra la respuesta de otro control, nuevamente se realizó una simulación, en donde los datos utilizados son presentados en la Tabla 5.2. Dicha simulación considera el control discontinuo del CMD como  $u = u(s, t) - K(t)sign(s)$ . La condición inicial para ambos controladores es

$$\begin{aligned} x(0) &= (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) \\ &= \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Tabla 5.2: Parámetros de simulación del CMD y el ASMC-Segunda Ley para el Acrobot sobre un carro.

Parámetro	Valor numérico	Parámetro	Valor numérico
$m_1$	0,265kg	$c_1$	1
$m_2$	0,265kg	$c_2$	3
$L_1$	0,206m	g	9,81m/s <sup>2</sup>
$L_2$	0,206m	$\bar{w}$	0,5m/s <sup>2</sup>
$l_{c1}$	0,103m	$I_{1,zz}$	2,3428x10 <sup>-4</sup> kgm <sup>2</sup>
$l_{c2}$	0,103m	$I_{2,zz}$	2,3428x10 <sup>-4</sup> kgm <sup>2</sup>
$\eta$	0,001	$\epsilon$	0,001
$k^+$	9	$\bar{K}$	1
$K$	0,939	$c_3, c_4$	1

$$s := c_1x_1 + c_2x_2 + x_3 + x_4, \tag{5.7}$$

con  $c_1, c_2 > 0$ . La variable deslizante es derivada

$$\begin{aligned} \dot{s} &= f_1(x, t) + f_2(x, t) + c_1x_3 + c_2x_4 + \\ &\quad (\bar{M}_{12} + \bar{M}_{22})\tau(t) \\ &= \varphi(x, t) + c_1x_3 + c_2x_4 + \bar{M}\tau \end{aligned}$$

donde  $\bar{M} = \bar{M}_{12} + \bar{M}_{22}$ , y los efectos no deseados  $f_1(x, t) + f_2(x, t)$  agrupados

$$\varphi(x, t) := f_1(x, t) + f_2(x, t)$$

El control  $\tau(t)$  debe dirigir a la estabilidad a la variable deslizante en tiempo finito,

$$\tau(t) = -(1/\bar{M})(u + c_1x_3 + c_2x_4) \quad c_1, c_2 > 0 \tag{5.8}$$

considerando de este modo al ASMC de forma general como

$$u(s, t) = -K(t)sign(s(x(t), t)) \tag{5.9}$$

la ganancia  $K(t)$  variando en un rango  $[\eta, k^+]$ ,  $\eta > 0$  es un eigenvalor de  $K$ . Donde  $K(t)$  satisface:

$$\dot{K} := \begin{cases} \bar{K}|s(x(t), t)|\text{sign}(|s(x(t), t)| - \epsilon) & \text{if } K > \eta \\ 0 & \text{if } K \leq \eta \end{cases} \quad (5.10)$$

con  $\bar{K} > 0$ ,  $\epsilon > 0$  y un valor positivo  $\eta$ . Dicho parámetro  $\epsilon$  es utilizado para obtener sólo valores positivos de  $K$ . Describiendo al ASMC-Segunda ley como

$$\tau(t) = -(1/\bar{M})(K(t)\text{sign}(s(x(t), t)) + c_3x_3 + c_4x_4)c_3, c_4 > 0 \quad (5.11)$$

El ASMC-Segunda Ley estabiliza los estados  $x_1$  y  $x_2$ . En la Figura 5.12 se muestra la posición angular del eslabón 1 en la posición invertida  $x_1(0)$ , la cual se estabiliza cerca de  $\frac{3\pi}{2} := 4,7124$  radianes, es decir, en la posición deseada (invertida), mientras que la Figura 5.14 se muestra cercana a 0 radianes, lo cual físicamente es el ángulo entre ambos eslabones, o mejor dicho, es el ángulo entre la proyección del primer eslabón y el segundo. Además, el péndulo es afectado por efectos no inerciales inducidos por la plataforma móvil, es decir, el carro, sin embargo, y pese su presencia, el controlador presenta robustez. Las Figuras 5.13 y 5.15 muestran los errores. La Figura 5.16 muestra la respuesta de estados  $x_3$  y  $x_4$  con el ASMC-Segunda Ley.

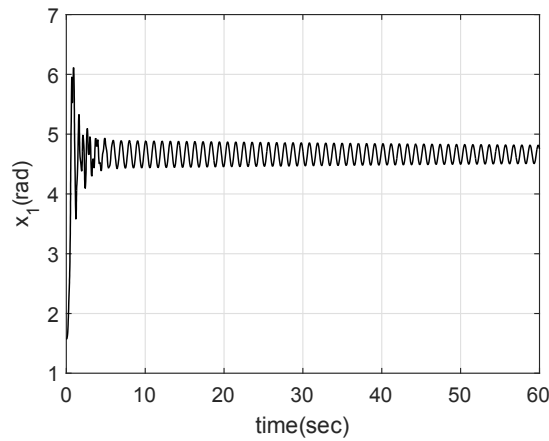


Figura 5.12: Posición angular del estado  $x_1$ : Eslabón 1.

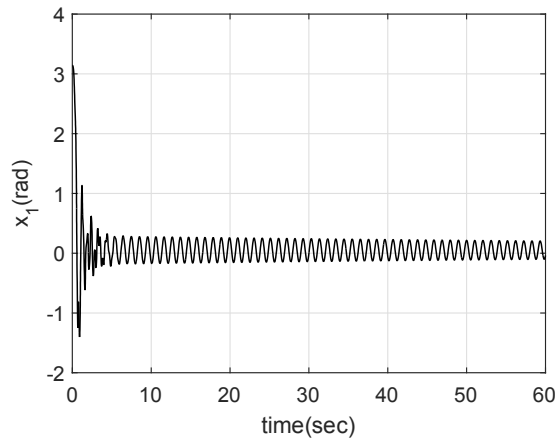


Figura 5.13: Error de posición del estado  $x_1$  del Acrobot sobre un carro: Eslabón 1.



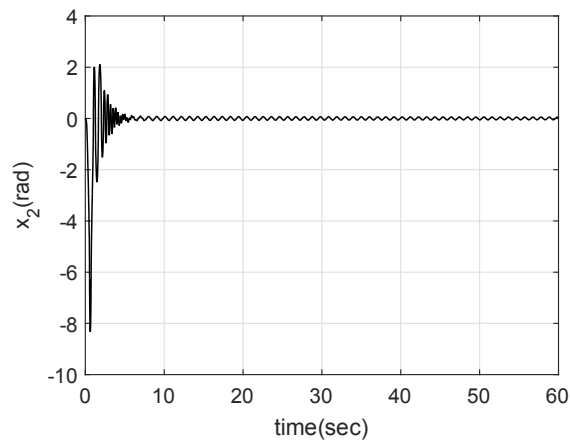


Figura 5.14: Posición angular del estado  $x_2$ : Eslabón 2

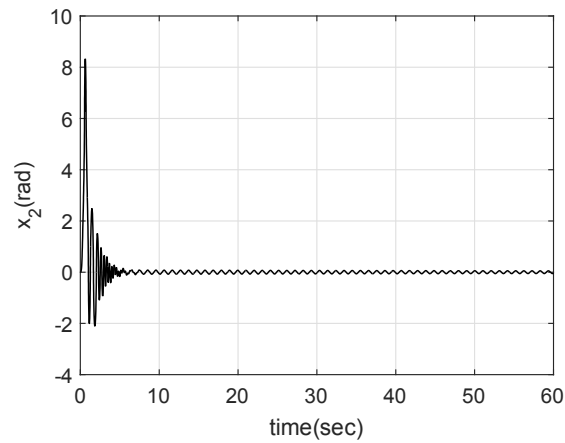
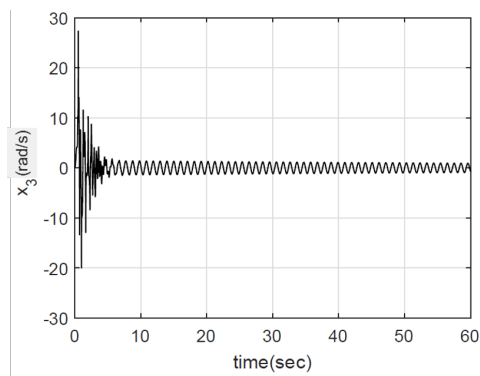
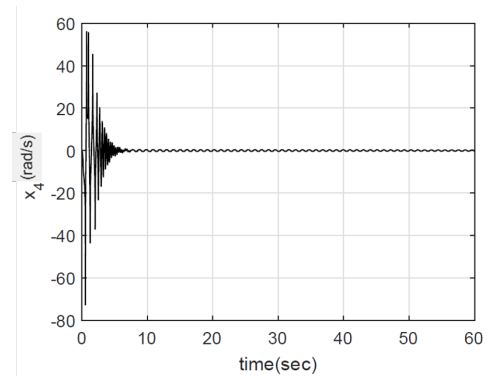


Figura 5.15: Error de posición del estado  $x_2$  del Acrobot sobre un carro: Eslabón 2.



(a) Estado  $x_3$ : Velocidad angular del eslabón 1.



(b) Estado  $x_4$ : Velocidad angular del eslabón 2.

Figura 5.16: Velocidades angulares de los estados  $x_3$  y  $x_4$ .

En la Figura 5.17 se presenta la robustez del estado  $x_1$  aplicando el control ASMC-Segunda Ley contra el CMD, mientras que en la Figura 5.18 es mostrada la comparación del estado  $x_2$  posterior a la aplicación de los controles antes mencionados.

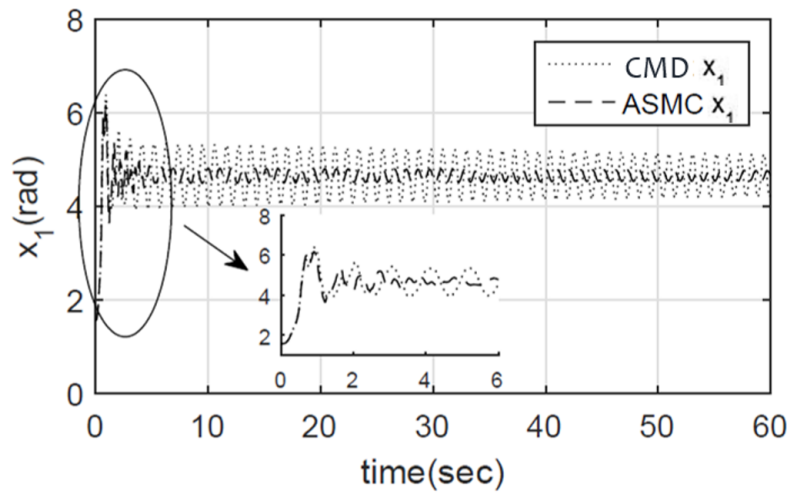


Figura 5.17: Comparación del estado  $x_1$ : CMD contra el ASMC.

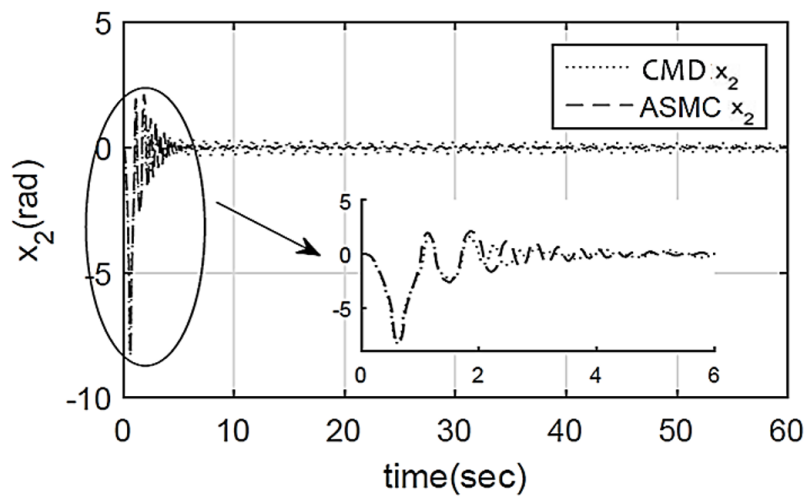


Figura 5.18: Comparación del estado  $x_2$ : CMD vs ASMC.

Los errores de los estados  $x_1$  y  $x_2$  respecto a las posiciones deseadas se observan en las Figuras 5.19 y 5.20. Mientras que las señales de control del ASMC-Segunda Ley y el CMD se muestran en la Figura 5.21a y 5.21b, respectivamente.

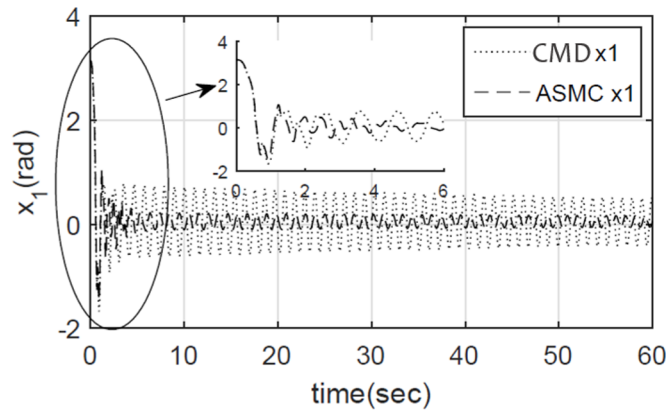


Figura 5.19: Error de posición del estado  $x_1$ .

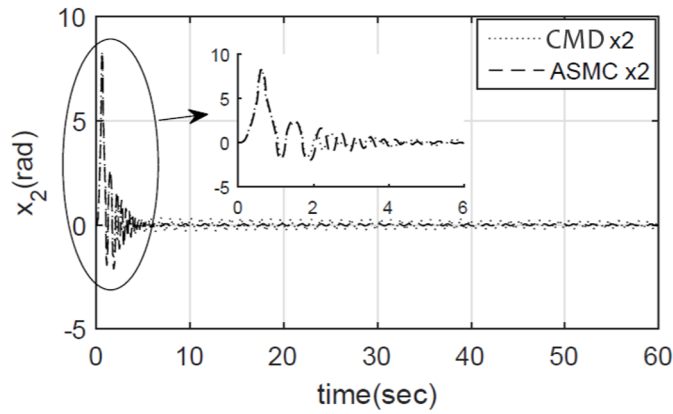
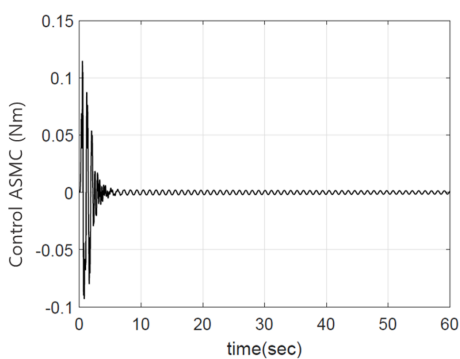
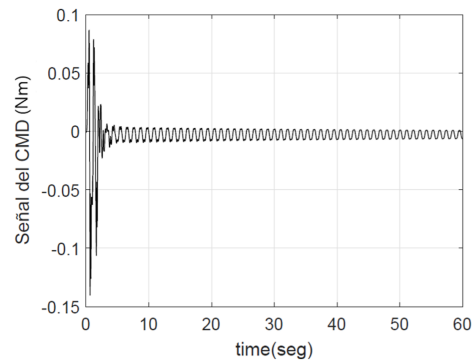


Figura 5.20: Error de posición del estado  $x_2$ .



(a) Respuesta del control ASMC-Segunda Ley.



(b) Respuesta del control CMD.

Figura 5.21: Respuesta de las señales de control del ASMC-Segunda Ley y el CMD.

El comportamiento de la ganancia  $K(t)$  se muestra en la Figura 5.22 satisfaciendo (5.10), lo que físicamente significa que la postura invertida del Acrobot sobre un carro es alcanzada, sin embargo, al estar en un marco referencial no inercial, el carro aún presenta un movimiento generado por el péndulo al estar sobre éste, por lo que la ganancia  $K(t)$  siempre se mantiene oscilando en relación a las posturas que el sistema presente en cada instante de tiempo.

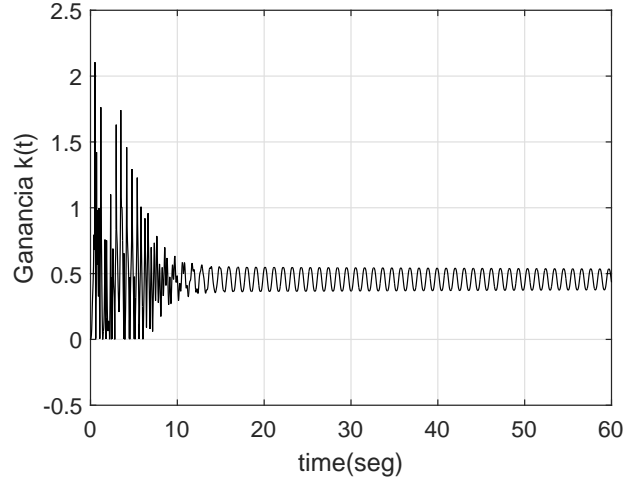


Figura 5.22: Comportamiento de la ganancia  $k(t)$  con el ASMC-Segunda Ley.

En la Tabla 5.3 se muestra el Error Cuadrático Medio (RMSE, por sus siglas en inglés), de cada uno de los controladores antes mencionados en el presente Capítulo, el cual se define mediante (5.12), donde  $X_m$  es la la posición medida,  $X_e$  es la posición estimada,  $s$  es la muestra de datos a considerar y  $N$  es la cantidad total de muestras.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{s=1}^N (X_m - X_e)^2}{N}} \quad (5.12)$$

Tabla 5.3: RMSE del control PID, el ASMC-Primera Ley, el CMD y el ASMC-Segunda Ley.

<b>RMSE entre el control PID y el ASMC-Primera Ley</b>		
	<b>RMSE del Eslabón 1</b>	<b>RMSE del Eslabón 2</b>
<b>PID</b>	0.0016429	0.0002904
<b>ASMC-Primera Ley</b>	0.0002246	0.0002263
<b>RMSE entre el CMD y el ASMC-Segunda Ley</b>		
	<b>RMSE del Eslabón 1</b>	<b>RMSE del Eslabón 2</b>
<b>CMD</b>	0.0020187	0.0007082
<b>ASMC-Segunda Ley</b>	0.0000601	0.0000809

De modo que, con los datos obtenidos en la Tabla 5.3 se tiene que:

- Para la primera simulación, el RMSE entre el control PID y el ASMC-Primera Ley correspondiente al primer eslabón, muestra la robustez del control adaptable, lo que físicamente significa que la posición invertida es alcanzada con menor dificultad cuando se utiliza el ASMC-Primera ley, y que, a pesar de que el control PID también lo hace, el error que prevalece entre la posición deseada ( $270^\circ$ ) y la estimada, es mayor. Por otro lado, el RMSE del eslabón 2 no muestra una diferencia notable, ya que, para ambos casos, una vez que el primer eslabón se encuentra estable, el segundo es capaz de estabilizar con facilidad,
- y en la segunda simulación, el RMSE entre el CMD y el ASMC-Segunda Ley del eslabón 1 muestra una diferencia notable, debido a que el ASMC-Segunda Ley tiene la capacidad de adaptar su ganancia y su superficie con respecto al tiempo, mientras que el RMSE del eslabón 2, en el caso del CMD muestra ser notablemente más grande que el control adaptable, lo que físicamente se traduce en que la posición invertida desea es alcanzada en un tiempo mayor que con el ASMC-Segunda ley.

## Conclusión

En este Capítulo se propuso el control ASMC en un marco referencial no inercial. Se diseñó, además, un control PID y un CMD de modo que el control propuesto pudiese ser comparado, y así mostrar su efectividad, Las respuestas obtenidas para cada caso lograron estabilizar al péndulo en la postura invertida, sin embargo el ASMC fue quien presentó robustez en comparación con los otros al rechazar los efectos no inerciales. Finalmente, se mostraron los resultados demostrando que el sistema alcanza su estabilidad en un tiempo finito menor a 10 segundos.



# Conclusión General

En el presente trabajo de tesis el sistema tipo péndulo Acrobot sobre un carro fue estudiado. El interés sobre este sistema se debe a su comportamiento físico inestable y no lineal, convirtiéndolo en un reto para la elaboración de una ley de control capaz de garantizar la estabilidad del sistema pese a las perturbaciones, incertidumbres y efectos no inerciales que el modelo pudiera presentar.

Desde el inicio del trabajo se realizó la descripción del sistema física y matemáticamente, así como la de algunas otras configuraciones tipo Péndulo, tales como el Pendubot, Acrobot y el péndulo sobre un carro, mencionando que debido a su configuración e inestabilidad intrínseca suelen estudiarse como sistemas inerciales, aunque para el caso de los péndulos montados sobre un carro o plataforma móvil se contempla al sistema como no inercial, esto debido a la aceleración propiciada por dicho carro o plataforma móvil, de modo que la acción de control suele aplicarse para lograr su estabilización.

El sistema Acrobot sobre un carro, a lo largo de esta Tesis, se contempló como un sistema no inercial en un marco referencial no inercial, debido a la afectación que sufre con la aceleración externa del carro. Además, se presentaron los fundamentos teóricos para el modelado matemático de las ecuaciones que describen la dinámica de sistemas mecánicos no inerciales, así como las propiedades del CI de un cuerpo rígido, la interpretación matemática de las leyes de Newton respecto de un sistema de referencia mecánico no inercial, el teorema de Steiner, el teorema de König para la ecuación de energía y el método clásico de las ecuaciones de Euler-Lagrange. De igual forma, se describieron los fundamentos teóricos de sistemas con MD, y del ASMC en su sentido matemático y físico. Se introdujo el concepto de estabilidad de Lyapunov y los tipos de estabilidad con la finalidad de asegurar que el control que se propuso estabilizara al sistema. Con dichos fundamentos, se presentó el modelo matemático del sistema Acrobot sobre un carro en un sistema no inercial y se propuso el ASMC-Segunda ley para realizar la tarea de estabilización de postura invertida y el rechazo de los efectos no inerciales inducidos por el Acrobot al acelerarse. En los resultados de simulación el modelo matemático del Acrobot sobre un carro en lazo cerrado con la ley de control propuesta fue presentado junto con otros dos controladores: PID y CMD, mostrando que el ASMC es capaz de estabilizar la postura del mecanismo y rechazar de mejor forma los efectos no inerciales, e incertidumbres acotadas en un tiempo finito.





# Trabajos futuros

El Acrobot sobre un carro es un sistema muy prometedor para la aplicación de técnicas de control en el área de ingeniería y robótica. Algunas propuestas para la continuación de este tipo de Péndulo en un marco referencial no inercial es la aplicación de un control adaptable basado en observador para mejorar la respuesta del sistema correspondiente a la postura invertida, así como la implementación en tiempo real.



# Bibliografía

- [1] Petre P Teodorescu. *Mechanical Systems, Classical Models: Volume II: Mechanics of Discrete and Continuous Systems*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [2] Pal Johan From, Jan T Gravdahl, and Kristin Y Pettersen. *Vehicle-manipulator systems*. Springer, 2016.
- [3] Shozo Mori, Hiroyoshi Nishihara, and Katsuhisa Furuta. Control of unstable mechanical system control of pendulum. *International Journal of Control*, 23(5):673–692, 1976.
- [4] Mrdjan Jankovic, Daniel Fontaine, and Petar V KokotoviC. Tora example: cascade-and passivity-based control designs. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(3):292–297, 1996.
- [5] Mark W Spong and Daniel J Block. The pendubot: A mechatronic system for control research and education. In *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 555–556. IEEE, 1995.
- [6] John Hauser and Richard M Murray. Nonlinear controllers for non-integrable systems: The acrobot example. 1990.
- [7] J Rubi, A Rubio, and A Avello. Swing-up control problem for a self-erecting double inverted pendulum. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 149(2):169–175, 2002.
- [8] Knut Graichen, Michael Treuer, and Michael Zeitz. Swing-up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation. *Automatica*, 43(1):63–71, 2007.
- [9] Vadim I Utkin. Sliding mode control design principles and applications to electric drives. *IEEE transactions on industrial electronics*, 40(1):23–36, 1993.
- [10] Yuri Shtessel, Christopher Edwards, Leonid Fridman, and Arie Levant. *Sliding mode control and observation*. Springer, 2014.
- [11] Nabanita Adhikary and Chitrlekha Mahanta. Integral backstepping sliding mode control for underactuated systems: Swing-up and stabilization of the cart–pendulum system. *ISA transactions*, 52(6):870–880, 2013.
- [12] Rong Xu and Ümit Özgüner. Sliding mode control of a class of underactuated systems. *Automatica*, 44(1):233–241, 2008.

- [13] Jorge Serrano-Heredia, Alexander G Loukianov, and Eduardo Bayro-Corrochano. Sliding mode block control regulation of the pendubot. In *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 8249–8254. IEEE, 2011.
- [14] Soon-Geul Lee et al. Sliding mode controls of double-pendulum crane systems. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27(6):1863–1873, 2013.
- [15] Jean-Jacques Slotine and S Shankar Sastry. Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators. *International journal of control*, 38(2):465–492, 1983.
- [16] Arie Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6):1247–1263, 1993.
- [17] Arie Levant. Universal single-input-single-output (siso) sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE transactions on Automatic Control*, 46(9):1447–1451, 2001.
- [18] Giorgio Bartolini, Antonella Ferrara, Elio Usai, and Vadim I Utkin. On multi-input chattering-free second-order sliding mode control. *IEEE transactions on automatic control*, 45(9):1711–1717, 2000.
- [19] Salah Laghrouche, Franck Plestan, and Alain Glumineau. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode. *Automatica*, 43(3):531–537, 2007.
- [20] Franck Plestan, Alain Glumineau, and Salah Laghrouche. A new algorithm for high-order sliding mode control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 18(4-5):441–453, 2008.
- [21] A Poznyak. *Modelado matemático de los sistemas mecánicos, eléctricos y electromecánicos*. Pearson, 2005.
- [22] Atam Arya. *Introduction to classical mechanics*, 2000.
- [23] Reza Olfati-Saber. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [24] Rafael Kelly and Victor Santibáñez. *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson educación, 2003.
- [25] Russ Tedrake. Underactuated robotics: Learning, planning, and control for efficient and agile machines: Course notes for mit 6.832. *Working draft edition*, 3, 2009.
- [26] Vladimir Igorevich Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer Science & Business Media, 2013.
- [27] Gerald DeJong. Ai can rival control theory for goal achievement in a challenging dynamical system. *Computational Intelligence*, 15(4):333–366, 1999.
- [28] Karl Johan Åström and Katsuhisa Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36(2):287–295, 2000.

- [29] Mark W Spong. Underactuated mechanical systems. In *Control problems in robotics and automation*, pages 135–150. Springer, 1998.
- [30] Qifeng Wei, Wijesuriya P Dayawansa, and William S Levine. Nonlinear controller for an inverted pendulum having restricted travel. *Automatica*, 31(6):841–850, 1995.
- [31] AS Shiriaev, O Kolesnichenko, and L Paramonov. How to redistribute energy between different links of the pendubot. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):545–550, 2002.
- [32] Celikovskiy S. Zikmund, J. and C.H. Moog. Nonlinear control design for the acrobot. *IFAC Proceedings*, 40(20):446–451, 2007.
- [33] Julia Timmermann, S Khatab, Sina Ober-Blöbaum, and Ansgar Trächtler. Discrete mechanics and optimal control and its application to a double pendulum on a cart. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):10199–10206, 2011.
- [34] Vadim I Utkin. *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [35] Vadim Utkin, Jürgen Guldner, and Jingxin Shi. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. CRC press, 2009.
- [36] V Utkin and JY Gulder. Shi j.,“. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*”, *Taylor & Francis*, 1999.
- [37] Igor Boiko and Leonid Fridman. Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers. *IEEE transactions on automatic control*, 50(9):1442–1446, 2005.
- [38] Igor Boiko, Leonid Fridman, Alessandro Pisano, and Elio Usai. Analysis of chattering in systems with second-order sliding modes. *IEEE transactions on Automatic control*, 52(11):2085–2102, 2007.
- [39] Arie Levant. Principles of 2-sliding mode design. *automatica*, 43(4):576–586, 2007.
- [40] Karl Johan Astrom and Bjorn Wittenmark. Adaptive control 2nd edition. *Addison-Wesley Pub Co.*, 1994, 1994.
- [41] Bodson M. Sastry, S. Adaptive control: Stability, convergence, and robustness. *Prentice-Hall, NY*, 1994.
- [42] Vadim I Utkin. Sliding modes in optimization and control problems, 1992.
- [43] David J Perreault, Kenji Sato, RL Selders, and John G Kassakian. Switching-ripple-based current sharing for paralleled power converters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 46(10):1264–1274, 1999.
- [44] Franck Plestan, Yuri Shtessel, Vincent Bregeault, and Alex Poznyak. New methodologies for adaptive sliding mode control. *International journal of control*, 83(9):1907–1919, 2010.

- [45] Yuri B Shtessel, Jaime A Moreno, Franck Plestan, Leonid M Fridman, and Alexander S Poznyak. Super-twisting adaptive sliding mode control: A lyapunov design. In *49th IEEE conference on decision and control (CDC)*, pages 5109–5113. IEEE, 2010.
- [46] Vadim I Utkin and Alex S Poznyak. Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method. *Automatica*, 49(1):39–47, 2013.
- [47] Vadim I Utkin. Sliding mode control design principles and applications to electric drives. *IEEE transactions on industrial electronics*, 40(1):23–36, 1993.
- [48] Vadim Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic control*, 22(2):212–222, 1977.
- [49] Vadim Utkin and Hoon Lee. Chattering problem in sliding mode control systems. In *International Workshop on Variable Structure Systems, 2006. VSS'06.*, pages 346–350. IEEE, 2006.
- [50] Mathukumalli Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. Siam-, 2002.
- [51] E. Barbashian. Introduction in to stability theory. *Nauka, Moscow*, 1967 (in Russian).
- [52] Jaime A Moreno and Marisol Osorio. A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *2008 47th IEEE conference on decision and control*, pages 2856–2861. IEEE, 2008.

## Anexo: Resultados publicados.

- Se publicó en la Conferencia 2019 16th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2019) con el título **Second Adaptive Sliding Mode Control Law for Non-Inertial Acrobot on a Cart System**, autores: Laura Trejo y Hussain Alazki, CINVESTAV, Ciudad de México.
- Se sometió un artículo en el 4to CIERMMI 2019: Congreso Interdisciplinario de Energías Renovables, Mantenimiento Industrial, Mecatrónica e Informática, con el título, **Control Robusto Adaptable para Sistema no inercial: Acrobot sobre un carro**, autores: Laura Trejo y Hussain Alazki, Santiago de Querétaro, Querétaro.

# Second Adaptive Sliding Mode Control Law for the Non-Inertial Acrobot on a Cart System

1<sup>st</sup> Laura Trejo  
Mechatronics department,  
Engineering Faculty,  
Universidad Autonoma del Carmen  
Ciudad del Carmen, Campeche, México  
E-mail: laura\_lets@hotmail.com

2<sup>nd</sup> Hussain Alazki  
Mechatronics department,  
Engineering Faculty,  
Universidad Autonoma del Carmen  
Ciudad del Carmen, Campeche, México  
E-mail: halazki@pampano.unacar.mx

**Abstract**—The work aims to design an adaptive strategy using the methodology Second Adaptive Sliding Mode Control that allows getting a dynamical gain with respect to undesired effects to achieve attitude stabilization of the Acrobot on a cart in a non-inertial framework, with an external acceleration induced by the cart. The implementation scheme of the system by numerical simulation, in the platform MATLAB®/Simulink shows its performance and compares its effectiveness against a Sliding Mode Control.

**Index Terms**—Non-Inertial System, Acrobot, Adaptive Robust Control.

## I. INTRODUCTION

The non-inertial effects involve reaction forces and relative motions which change the performance of the system as perturbations actions where any frame with respect to other differs from point to point and occurs when a physical system is not fixed to a base or surface [1] and are presented as reactions to the non-inertial movement that system experiences. Some pendulums are studied from a non-inertial framework ([2],[3],[4]) with an articular mobile component (cart or link) taken as an accelerated framework (non-inertial) or inertial framework (without an acceleration). Pendulums are used in control and robotics research, also for simulation and the study of some practical systems like robotic arms and the stabilization of the buildings, due to its natural unstable response. The inverted pendulum on a cart is a nonlinear example of an underactuated system [5] in a non-inertial framework.

Some configurations of Pendulums that let to add complexity are the simple pendulum, rotary pendulum, Foucault pendulum, Furuta pendulum, the pendulum on a cart and double pendulum. The Cart Pole [6] consists of a simple inverted pendulum that rotates freely mounted on an actuated cart. The double pendulum on a cart [7] consists of a non-actuated two-link mechanism attached to an actuated mobile platform. In addition, there are a couple of variants for the double pendulum as the double Pendulum mounted on a cart, the Pendubot, the Acrobot; these two last pendulums are

planar rotational mechanisms [8]; the first one resembles of a human arm and the second one is similar to a human gymnastic on parallel bars, where the torque is in the second joint while the first one rotate freely [9]. In this case, the system will be considered in a non-inertial framework where reactions forces and relative motions from the cart are included.

The control methods used for Pendulums are made for swing-up and balancing task, considering undesired effects and non-inertial effects in the model to deal with them a control robust is used. One of them is the Sliding Mode Control (SMC) that is a strategy for control of nonlinear uncertain systems ([10],[11]), however, the main drawback of the SMC, is the chattering ([12],[13]). There are several ways to control the chattering, one of them is [10] and another one to decrease this effect is the use of higher-order Sliding Mode (SM) Control ([14],[15]). Also, in [16] an SM strategy was presented for the swing up and stabilization of a Cart-Pole system. Meanwhile, a case for an Acrobot [17] presents a robust controller design based on the Super-Twisting algorithm to stabilize it in the position under a non-inertial framework and reject undesired effects, caused by the cart's motion. However, there are in [18] two approaches based on the adaptive methodology. The first obtained by the direct measurements of the output signals of a first-order low-pass filter and the second one [18] using the method surface-adaptation, which alters the dynamic of a nonlinear system [19] applying a discontinuous control signal that forces the system to slide until reaching the desired stability point, whose the main advantage is reject modeling uncertainties and nonlinear effects ([20],[21]), known as Second Adaptive Sliding Mode Control Law (ASMC). Although the ASMC allows adjusting dynamically the control gain [18] without knowledge of uncertainties and perturbations bounds, it implies improving dynamic characteristics while properties of a controlled plant or environment is variant.

In this paper, the Second ASMC law is a strategy studied to achieve the attitude stabilization of the inverted position in the Acrobot on a cart in a non-inertial framework, including



## Control Robusto Adaptable para Sistema no inercial: Acrobot sobre un carro

### Robust Adaptive Control for System non-inertial: Acrobot on a cart

TREJO SOSA, Laura Elena†\*, ALAZKI, Hussain

*Universidad Autónoma del Carmen, Facultad de Ingeniería y tecnología*

ID 1<sup>er</sup> Autor: (ORC ID - 0000-0002-3114-5216, Researcher ID Thomson – AAA-1616-2019, CVU -850475)

ID 1<sup>er</sup> Coautor (ORC ID -0000-0002-1960-3624, Researcher ID Thomson - M-1706-2017, SNI-CONACYT SNI-I)

Fecha de Envío: Julio, 11, 2019; Aceptado (Indicar Fecha de Aceptación: Uso exclusivo de ECORFAN)

#### Resumen

En este trabajo se muestra el modelo matemático del sistema no lineal de un péndulo tipo Acrobot sobre un carro, el cual consiste en un brazo planar de dos uniones de revoluta, con un actuador en el codo, pero sin actuador en el hombro, mediante el método de Euler-Lagrange. Además, se propone una estrategia de control robusto para lograr la estabilización del péndulo Acrobot sobre un carro en su posición invertida en un marco de referencia no inercial, en donde este efecto incluye reacción de fuerzas y movimientos relativos que pueden potencialmente alterar el comportamiento del sistema. El algoritmo propuesto es el control adaptable por modos deslizantes (ASMC), el cual altera la dinámica de un sistema no lineal mediante la aplicación de una señal de control discontinua que obliga al sistema a “deslizarse” hasta alcanzar el punto de estabilidad deseado, cuya principal ventaja es el rechazo de incertidumbres, y efectos no inerciales. Para su implementación se cuenta con una simulación numérica en la plataforma de Simulink.

**Sistemas no lineales, Acrobot, Modos deslizantes**

#### Abstract

This work shows the mathematical modeling of the non-linear system of an Acrobot on a car, which consist in a planar rotational mechanism with two joints of revolute, with an actuator in the elbow, but without actuator in the shoulder through the classical Euler-Lagrange method. In addition, a robust control strategies is proposed to achieve the attitude stabilization of the inverted position of Acrobot on a car in a non-inertial physical framework, these include reactions forces and relative motions which can potentially alter the performance of the system. The algorithm proposed is the Adaptive Sliding Modes Control (ASMC), which alters the dynamic of a non-linear system applying a discontinuous control signal that forces the system to “slide” until reaching the desired stability point, whose the main advantage is reject modeling uncertainties and non-linear effects, which result from the accelerated framework of reference to which Acrobot on a car. Implementing a scheme by numerical simulations in the platform Simulink.

**Non-inertial Systems, Acrobot, Sliding Mode**

**Citación:** TREJO SOSA, Laura Elena†\*, HUSSAIN, Alazki. Control Robusto Adaptable para Sistema no inercial: Acrobot sobre un carro. Research Journal. Año 1-1: 1-11

\* Correspondencia del Autor [laura\\_lets@hotmail.com](mailto:laura_lets@hotmail.com)

† Investigador contribuyendo como primer autor.



# UNACAR

Universidad Autónoma del Carmen  
"Por la Grandeza de México"

## ACUERDO PARA USO DE OBRA

**A quien corresponda**

**PRESENTE**

Por medio del presente escrito, **Laura Elena Trejo Sosa** (en lo sucesivo EL AUTOR) hace constar que es titular intelectual de la obra denominada, "**Control adaptable por modos deslizantes para un acrobot sobre un carro**" (en lo sucesivo la OBRA), en virtud de lo cual autoriza a la Universidad Autónoma del Carmen (en lo sucesivo la UNACAR) para que efectúe resguardo físico y/o electrónico mediante copia digital o impresa para asegurar su disponibilidad, divulgación, comunicación pública, distribución, transmisión, reproducción, así como digitalización de la misma con fines académicos y sin fines de lucro como parte de Repositorio Institucional de la UNACAR (*Runacar*).

De igual manera, es deseo del AUTOR establecer que esta autorización es voluntaria y gratuita, y que de acuerdo con lo señalado en la Ley Federal del Derecho de Autor y la Ley de Propiedad Industrial, la UNACAR cuenta con mi autorización para la utilización de la información antes señalada, estableciendo que se utilizará única y exclusivamente para los fines antes señalados. EL AUTOR autoriza a la UNACAR a utilizar las obras en los términos y condiciones aquí expresados, sin que ello implique que se le conceda licencia o autorización alguna o algún tipo de derecho distinto al mencionado respecto a la "propiedad intelectual" de la misma OBRA; incluyendo todo tipo de derechos patrimoniales sobre obras y creaciones protegidas por derechos de autor y demás formas de propiedad intelectual reconocida o que lleguen a reconocer las leyes correspondientes. Al reutilizar, reproducir, transmitir y/o distribuir la OBRA se deberá reconocer y dar crédito de autoría de la obra intelectual en los términos especificados por el propio AUTOR, y el no hacerlo implica el término de uso de esta licencia para los fines estipulados. Nada de esta licencia menoscaba o restringe los derechos patrimoniales y morales del AUTOR.

De la misma manera, se hace manifiesto que el contenido académico, literario, la edición y en general de cualquier parte de la OBRA son responsabilidad del AUTOR, por lo que se deslinda a la UNACAR por cualquier violación a los derechos de autor y/o propiedad intelectual, así como cualquier responsabilidad relacionada con la misma frente a terceros. Finalmente, el AUTOR manifiesta que estará depositando la versión final de su Tesis de maestría, OBRA y cuenta con los derechos morales y patrimoniales correspondientes para otorgar la presente autorización de uso.

En la ciudad de Carmen, del estado de Campeche a los 22 días el mes de noviembre de 2019.

Atentamente.

LAURA ELENA TREJO SOSA

---

**Nombre y Firma Autógrafa de EL AUTOR**

Escriba la Facultad, Escuela, Centro a la que está suscrita la obra: Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma del Carmen, Campus III.