DOMINIO Y CONTRADOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Julián Isaí López García
Sergio Jiménez Izquierdo
Santa del C. Herrera Sánchez*

A los jóvenes de este tiempo se les complican las matemáticas, desde las más simples con sus operaciones básicas tales como suma, resta, multiplicación y división, hasta las que por obviedad, implican operaciones más complejas y la conjugación de éstas. Es por tanto que hallar métodos de enseñanza más adecuados a las necesidades presentes, debiera ser nuestro diario quehacer, no importando el esfuerzo que esto requiera.

Tales métodos deben tener la particularidad de eliminar el nervio, miedo o temor al que los alumnos se enfrentan cuando están en clase. El solo hecho de decir: voy a pasar a algún alumno para que resuelva tal o cual operación, implica que el alumno sufra una serie de reacciones físicas y químicas al interior de su cuerpo, que muchos de ellos no logran controlar sus esfínteres y sucede lo inesperado. Digo esto por la experiencia obtenida y también puedo argumentar que al estar en clase (o en asesorías) ocurre lo mismo, sudan de sus manos de manera muy peculiar e incontrolable, y se sienten tan inseguros tan solo porque están ante una materia que por años han temido. Debemos darles confianza para calmar los ánimos caídos y las fobias adquiridas que enfrentan los jóvenes ante este reto. Uno de los temas que se les dificulta a los estudiantes es el de análisis de funciones con respecto del dominio y contradominio gráficamente. Es entonces que se genera un método didáctico para la explicación

* Docentes del cuerpo académico matemática educativa en la Universidad Autónoma del Carmen.

del tema en el aula, y a su vez un prototipo físico que coadyuve en este sentido.

A modo de justificación, podemos decir, que todos aprendemos más mientras ocupemos la mayor cantidad de nuestros sentidos como ayudantes del aprendizaje y así también involucrando lo que nos es llamativo; por ejemplo, es más fácil aprender las tablas de multiplicar por medio de una melodía (involucrando al oído y la música) que haciendo una repetición para memorizar las cantidades de dicha operación, acto mismo que se vuelve en lo general, tedioso.

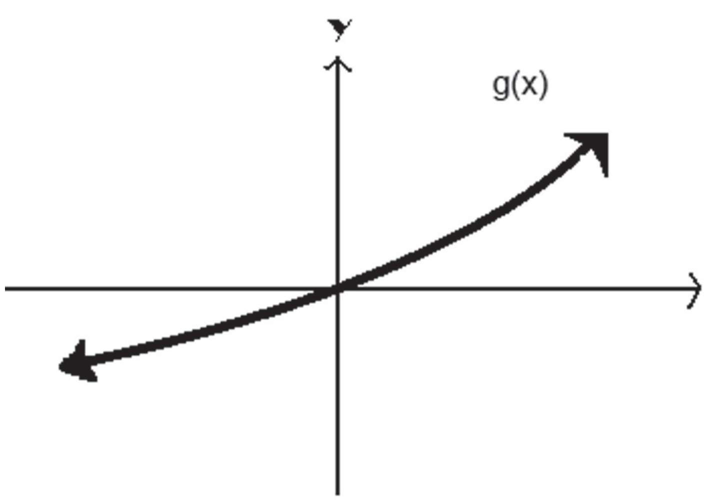
Guiándonos por los significados o definiciones de dominio y contradominio, podemos decir de manera coloquial, que el dominio de una función no es más que todos los valores que la variable independiente **x** pueda tomar para tal o cual función (es decir los valores que la variable **x** pueda tomar según se lo permita la función). Lo mismo podemos decir para la variable dependiente **y** y el respectivo contradominio o rango. Esto los estudiantes no lo comprenden, es entonces que se propone la creación de un prototipo que implique involucrar la mayor cantidad de nuestros sentidos y así apoyarnos y obtener ese aprendizaje sustancioso.

Método tradicional

Usualmente definimos al dominio de una función f como el conjunto X, donde el numero **y** es la imagen de **x** por **f** y se denota mediante f(x), a lo cual se llama el valor de **f** en **x**. El recorrido o rango de **f** se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X.(1). O también como: Una función **f** es una regla que asigna exactamente un elemento "y" de B a cada elemento **x** de A. En tal caso escribimos y = f(x). El conjunto A se denomina dominio de **f**.

El conjunto de todos los valores f(x) en B, esto es, {f(x)/x є A}, se llama recorrido (o imagen) de **f**.(2). Las definiciones anteriores son las que hoy día se presentan en las aulas y obviamente son correctas, pero es información que a los estudiantes les da fobia conocer (no entienden nada).

Siguiendo el trabajo habitual y cotidiano del tema en las aulas, analicemos el gráfico de la función g(x):



donde el dominio son todos aquellos valores o números reales pertenecientes al eje x para los cuales el eje **y** toma valores únicos permitidos del conjunto R. Por tanto, la función del grafico anterior (ver figura. 1) es continua y existe para todo **x** є R. Entonces, el dominio es todo el eje **x** que expresado en términos de intervalos queda: (-∞,∞), argumentando también que las flechitas de inclinación considerable en el grafico de la función, implican que la función se extiende infinitamente, abarcando al eje x por completo. Del mismo modo el análisis del contradominio implicaría una explicación similar pero recordándole a los alumnos que ahora la lectura será la que corresponda a todos los valores permitidos por la función para el eje **y** no importando si **y** toma un valor para varios y distintos valores de **x**. De igual forma (continua diciéndose al grupo) que para el eje **x** y su respectivo dominio, la función abarca a todo el eje **y** y por ende a todos los reales en este eje (-∞,∞). Para los que tienen la noción de estos temas es sumamente sencillo entender lo que se argumenta, pero las grandes masas de alumnos del tronco común no lo entienden por el alto contenido de lenguaje matemático.

El nuevo método

Estaba en la pizarra con mis pintarrones de todos colores (solo 4 para ser más exactos) y entrado en el tema, hice uso de todos mis conocimientos, artimañas educativas y psicopedagógicas para mi exposición, con el único objetivo de ser lo necesariamente elocuente y aún lo más explícito posible, para cosechar resultados acordes a mi esfuerzo y ahínco como ponente preocupado por su auditorio. Todo iba muy bien, pues sabía lo que decía con la fuerza y autoridad requeridas para hacerme escuchar y entender, pero estaba tan metido en lo mío a la manera tradicional de exponer el tema, que obviamente no me percataba de la real capacidad de absorción del conocimiento de mis oyentes. Las caras de asombro, sueño, desgano, desesperación y más… (deprimentes términos) no se hicieron esperar, pero yo seguía en lo mío. Una vez terminada mí brillante exposición, argumenté lo siguiente: ¿les quedo claro, verdad? Y aterricé de mi viaje por el mundo de las matemáticas. Ya en tierra caí de mi entusiasmo y admiré la ***face*** de mis alumnos, y vi que no habían entendido ni ***fa***. Tomé aire y casi empecé de cero una vez más, pero con palabras más acordes al lenguaje de rutina y corriente, por común. Las caras no cambiaron, pero mi ánimo sí, entonces me puse en ***standbye***, es decir, me apagué, pero no me morí, sino que me mantuve con el mínimo requerimiento de energía para seguir con vida y a la expectativa de que algo se me ocurriera para conseguir los objetivos pertinentes. En eso, mis expectativas se cumplieron al 100, y tuve el respiro y energías necesarias para iniciar de nuevo desde cero, asimismo, para salir de mi estado casi vegetativo.

Entonces comencé a explicar el tema con los frijolitos y manzanitas necesarias para suscitar el tan anhelado aprendizaje con significado. Comencé diciendo (tomando como referencia la figura 2): Miren jóvenes, esto es fácil, y véanlo de la siguiente forma: Para hallar el dominio, es necesario imaginar una barra vertical de tamaño infinito, e imaginar que dicha barra es conductora de corriente y que está conectada a una chicharra que haga "beep, beep, beep, beep", etcétera. (esto atrae la atención de los jóvenes y hasta arranca carcajadas de muchos, logrando así hacer amena e interesante la clase por el solo hecho de aprender). Y como la barra es vertical, se sobrepone al eje **x** y se hace un barrido completo del eje con dicha barra, comenzando desde -∞, hasta ∞, es decir de izquierda a derecha. Como la barra hará contacto físico con la gráfica de la función, es necesario también imaginar que la gráfica es portadora de energía eléctrica, por tanto, al hacer contacto la barra con la función, la chicharra comenzará a sonar desesperadamente mientras hacemos el barrido en el eje "x" y la barra vaya teniendo el contacto con la gráfica.

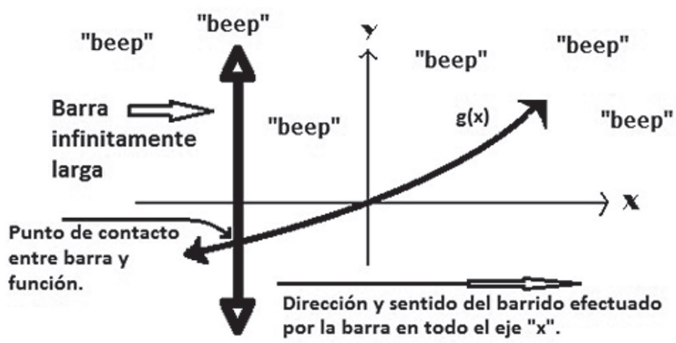
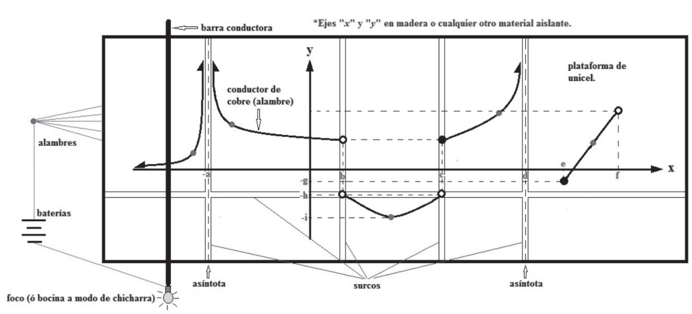


Figura 2 (la barra jamás deja de hacer contacto, por tanto los "beep´s" se hacen presentes indefinidamente).

Y como en nuestro gráfico de prueba la barra en ningún momento deja de tener contacto con la gráfica durante todo el barrido a lo largo del eje **x**, entonces la chicharra nunca se calla la boca (esto genera más risas), es por tanto que nuestro dominio pertenece al intervalo (-∞,∞). Con esta sencilla explicación, los alumnos comenzarán a comprender el significado del dominio y asimismo, del contradominio (siempre y cuando se comente que ahora la barra se ha de posicionar de manera horizontal, y que ahora el barrido se llevará a cabo durante todo **y**, de abajo hacia arriba, obteniendo como resultado también para la imagen un intervalo de (-∞,∞)), hecho que implica necesariamente que los objetivos se cumplan.

El prototipo

A continuación mostramos el esquema de un prototipo físico que se pretende armar con fines didácticos, y que coadyuve a la enseñanza de los temas del dominio y contradominio, apoyados en el actuar del nuevo método.



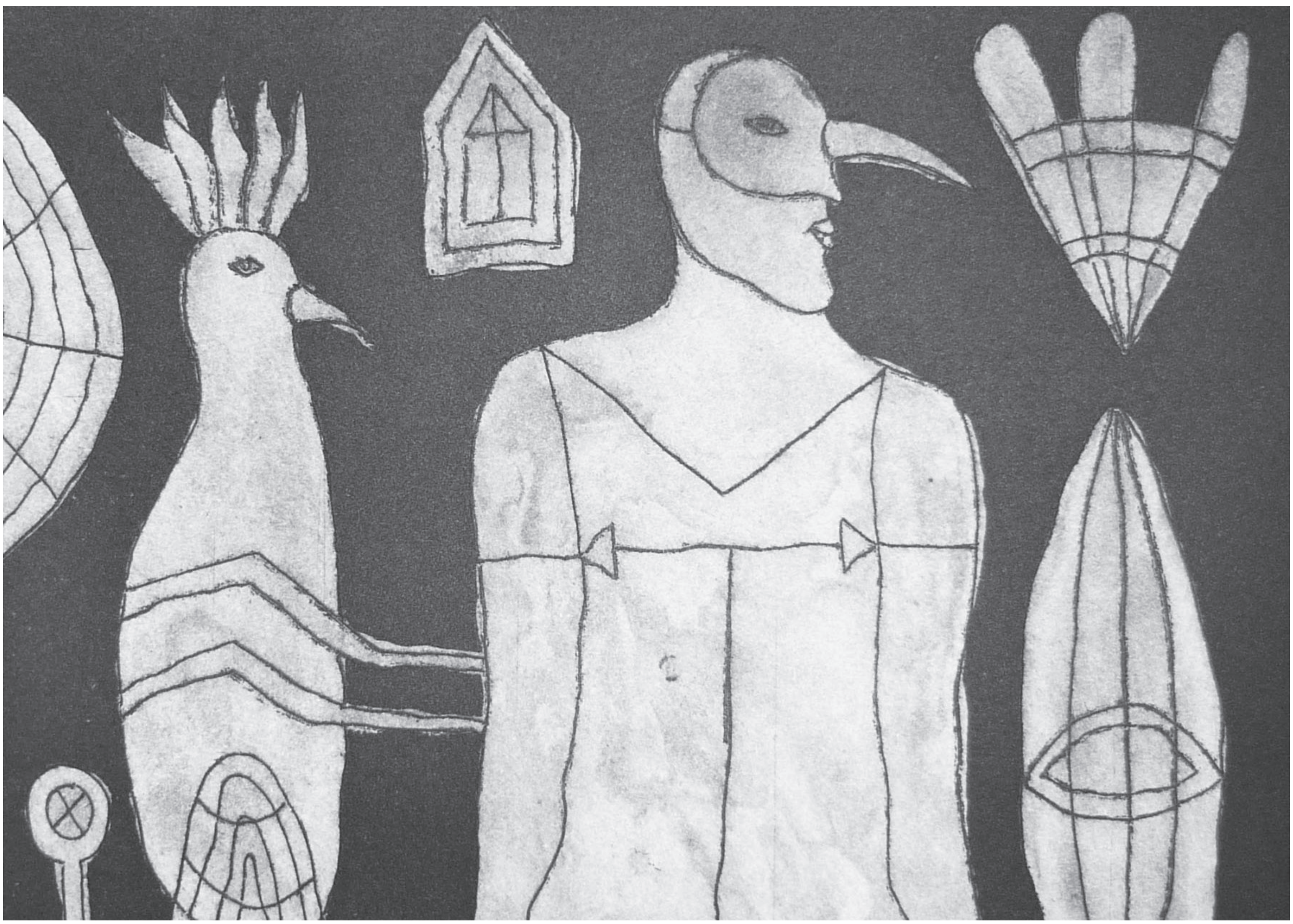
Dicho prototipo contiene las situaciones más típicas de una función a estudiar y ser sometida a la obtención de su dominio y contradominio. Por ejemplo, muestra una función por partes con características solo didácticas y de manera general, además, los ejes vienen segmentados por letras y no por números como generalmente se representa.

Su funcionamiento

Si somos observadores, una barra conductora (conectada al polo negativo de una pila) forma parte de su estructura; que al obtener el dominio, por obvias razones realiza un barrido a todo el eje "x" y de izquierda a derecha, donde podemos observar que la función tiene sus inicios en -∞, desde donde se intuye que la barra conductora hará contacto con la función; siguiendo con el barrido, la barra conductora caerá en el surco (sin metal) ubicado en el punto x = -a (primer asíntota vertical) donde la barra dejará de hacer contacto con la función (misma que está conectada al polo positivo de una batería, y por la cual correrá corriente eléctrica que encenderá la bombilla al hacer contacto la barra conductora con la función) y por tanto la bombilla se apagará, registrándose así un punto de fin de función y dando paso al primer tramo (intervalo) de nuestro recorrido, por tanto tendremos el siguiente intervalo: (-∞, -a); nuevamente continuamos nuestro recorrido, e inmediatamente al salir del surco, se enciende la bombilla, registrando un nuevo valor de inicio de otro intervalo justo en x = -a hasta otro punto en el eje **x** con valor x = b, donde por definición se observa un hueco (surco sin metal) que nuevamente se representa por otro surco donde también se pierde el contacto con la función y nuevamente la bombilla se apaga, registrándose otro fin de intervalo tal como (-a , b); continuando, la barra nuevamente encontrara un surco mas en x = c, pero aquí la bombilla no se apaga, pues en dicho surco existe la función (surco con metal) y por tanto no hay fin de intervalo, entonces seguimos nuestro recorrido hasta x = d donde otro surco apaga la bombilla y se cierra un tercer intervalo que inició desde x = b, y queda como: (b , d); se continua el recorrido y la bombilla no enciende hasta en x = e, y perdiéndose nuevamente el contacto en x = f y finaliza así nuestro recorrido por todo el eje **x**, quedándonos un dominio tal como: (-∞ , -a) u (-a , b) u (b , d) u [e , f). La misma situación se presenta para el contradominio.

Su estructura

Se propone que la base del prototipo sea de unicel, triplay, plástico o cualquier material no conductor con características propias de una base de este tipo. A esta base se le forman surcos (que contengan o no metal) que harán la vez de asíntotas (horizontales y verticales), huecos, o simplemente puntos de contacto (como en x= e para nuestro ejemplo). A esta base se le incrusta y se simula así una función, construida con alambre de calibre específico, y en ciertas partes de esta se suelden alambres conectados al borne positivo de una pila o batería propia también del prototipo, que se esconderá en la parte posterior de la base. También necesitamos una barra de material conductor, con la cual se hagan los barridos, que debe ser conectada al borne negativo de la batería por medio de una bombilla, que se encenderá y apagará para dar registro a los intervalos que la función establezca. Los ejes **x** y **y** se dibujan con marcadores de aceite, o se simulan con delgadas barras de madera o cualquier material no conductor igualmente de bajo grosor. Las letras o números deberán ser pintadas en la base para no interferir en el barrido. También se pueden escribir leyendas sobre la base (en áreas libres, para no interferir con el resto de la información), para dar más realce a lo que se explique en el aula; por ejemplo: el barrido en el eje **x** se lleva a cabo de izquierda a derecha, y el contradominio o rango, de abajo hacia arriba, o indicarse con flechas los sentidos de estos.



Bibliografía:

1) CÁLCULO. 8va. Edición. Larson. Hostetler. Edwards. Mc Graw Hill. Pp. 19.
2) CALCULO (Vol. 1). 2da. Edición. Robert T. Smith. Roland B. Minton. Mc Graw Hill. Pp. 13.