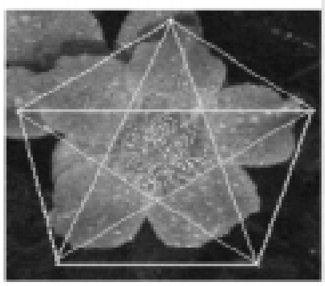
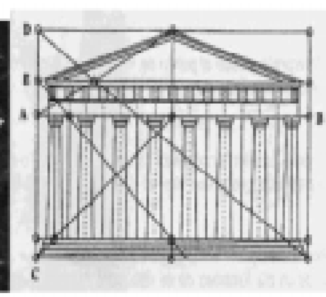
DEL NÚMERO DE ORO A LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

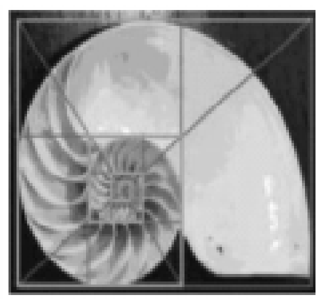
Gilberto Guerra Santiago
Jimmy Fabricio Hernández Pérez*

La curiosidad infinita del ser humano, ha hecho que nuestra especie sobresalga de las demás, así hemos pasado de ser seres recolectores de alimentos a seres que exploran su propia galaxia y que clonan cualquier ser vivo, gracias a la identificación del ADN, esa misma curiosidad que ha hecho posible todos los avances científicos, también ha encontrado la respuesta a la pregunta ¿qué tienen en común las matemáticas y las flores, la distribución de las hojas, las conchas de caracol, las pinturas de Da Vinci y Dalí y las tarjetas de crédito?. Y la respuesta es que en apariencia no hay nada en común, pero si se observa a la naturaleza con atención se puede ver que hay una proporción numérica que se repite en muchas formas vegetales, animales y otros objetos. Y es que existe un número que rige cosas tan dispares como los pétalos de una rosa y las pinturas de Da Vinci, Dalí y otros artistas. Es la proporción áurea, que el hombre ha descubierto en la naturaleza y ha utilizado para la creación estética.

Las flores y plantas organizan sus hojas siguiendo la proporción áurea para aprovechar al máximo el espacio y la luz del sol. El valor numérico de esta razón es el llamado número de oro o también sección áurea, proporción áurea o razón áurea o FI, o sea, 1,618… con infinitas cifras decimales. La espiral logarítmica surgida también a partir de este número es muy habitual en algunas formas de la naturaleza como los huracanes, los cuernos del carnero, los moluscos e incluso las galaxias.





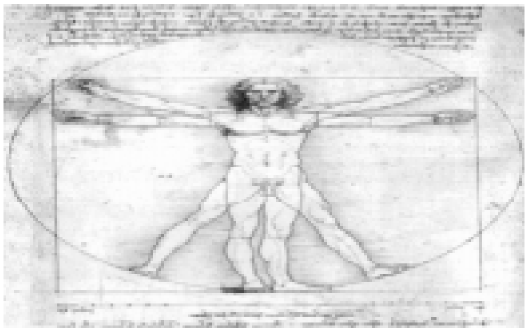


Ya en la antigüedad se la bautizó como proporción divina por sus propiedades supremas, incomprensibles y singulares. Alrededor del año 4700 a C., los egipcios conocían la proporción Ö (phi) denominada la proporción sagrada. Esta medida fue utilizada por éstos, entre otras cosas, en el diseño de las pirámides de Gizeh. La proporción utilizada para la construcción de las pirámides es 2Ö, obtenida del cociente entre la altura de cualquiera de los tres triángulos que conforman las pirámides y uno de sus lados. Otro ejemplo es el Partenón griego.

Su utilización en la arquitectura del Egipto antiguo, en la Grecia antigua u otra, ha dado templos de aspecto estético-plástico armoniosos. El trabajo de arte realizado por Leonardo Da Vinci en la obra de Luca Pacioli la Divina Proporción (1509) ha ayudado extender la fama del número de oro más allá de la comunidad matemática. En 1497 Luca Pacioli, es invitado a la corte de Ludovico Sforza, duque de Milán, para enseñar matemáticas. Allí conoce a Leonardo Da Vinci, del que se hace amigo y comparten experiencias. Leonardo ilustra una de las obras de Luca, De divina proportione.

En esta obra se describen cuáles han de ser las proporciones de las construcciones artísticas. En particular, Pacioli propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90º con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

* Gilberto Guerra Santiago, profesor investigador en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Carmen.
Jimmy Fabricio Hernández Pérez, profesor de tiempo completo en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Carmen.



Desde un punto de vista matemático, el número de oro es aproximadamente igual a 1,618. Su expresión matemática es:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

es decir que se debe tomar el único número positivo que multiplicado por sí mismo da 5, al cual se le llama la raíz cuadrada de 5, se le añade 1, y se divide entre 2. Tiene ciertas propiedades matemáticas curiosas, como ésta: si se considera un gran rectángulo cuya longitud dividida por la anchura es igual al número de oro, se le puede cortar en dos en el sentido de la anchura y obtener un cuadrado de lado igual a la anchura inicial, y un pequeño rectángulo cuya longitud dividida por la anchura es también el número de oro.

Este hecho matemático interesante, según el cual el número de oro es el único número que tiene esta propiedad, puede mostrar, justamente por su singularidad, el origen divino de la armonía fundada en la proporción expresada matemáticamente por este número o por un rectángulo de proporciones dadas, lo que es en sí una forma geométrica.

La sucesión de Fibonacci.

La proporción áurea está relacionada con la sucesión de Fibonacci. Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci (que significa hijo de Bonacci) nació en la ciudad italiana de Pisa y vivió de 1170 a 1250.

Se conoce muy poco sobre su vida; sin embargo, en el prefacio de uno de sus libros más importantes, el Liber Abaci, Leonardo comenta que fue su padre quien le enseñó Aritmética y lo animó a estudiar matemáticas. En Bujía, Leonardo recibió este tipo de enseñanza de maestros árabes.

Se convirtió en un especialista en Aritmética y en los distintos sistemas de numeración que se usaban entonces. Muy pronto se convenció de que el sistema hindo-arábigo era superior a cualquiera de los que se usaban en los distintos países que había visitado. Decidió llevar este sistema a Italia y a toda Europa de ser posible, en donde aún se usaban los numerales romanos y el ábaco.

Los mercaderes italianos al principio estaban renuentes a utilizar estos nuevos métodos pero poco a poco el sistema de numeración hindo-arábigo fue introducido en Europa gracias, en buena medida, al trabajo de Fibonacci.

Leonardo regresó a Pisa alrededor del año 1200 y ahí escribió una gran cantidad de libros y textos sobre matemáticas. El Liber Abaci, escrito en 1202, en éste surgió la sucesión 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . ., la cual puede definirse en forma recursiva como $F_0=0$, $F_1=1$, y $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n >= 0$.

Consideremos la siguiente sucesión de números:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Cada número a partir del tercero, se obtiene sumando los dos que le preceden. Por ejemplo, 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, ..., 8+13=21; el siguiente a 34 será 34 + 21 = 55. Esta sucesión es la llamada sucesión de Fibonacci.

Aunque la relación entre la serie de Fibonacci y la proporción áurea, no es inmediata, sí es interesante. Primero partiendo de las siguientes series basadas en la de Fibonacci:

Fn={0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .}; Fa={1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .}

Después definimos una sucesión como el cociente de las dos sucesiones de Fibonacci; esto es:

$$\frac{F_n}{F_a}=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13}\ldots\right\}$$

Curiosamente la proporción de la que hemos estado hablando, la proporción áurea, también aparece en esta sucesión. Por ser Ö irracional, se comprende que continuando con la sucesión Fn/Fa resulta posible aproximar Ö con el número de cifras decimales que se desee.

La sucesión de Fibonacci presenta diversas regularidades numéricas. Para que resulte más sencillo se enuncian casos particulares (aunque se cumplen en general) y se calculan los primeros catorce términos de esta sucesión:

t_1	t_2	t_3	t_4	T_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}
1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**	**233**	**377**

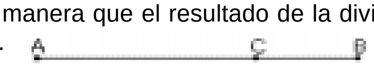
- * Si se suman los cuatro primeros términos y se añade un 1, resulta el sexto (1+1+2+3 + 1 = 8). Si se suman los cinco primeros términos y se añade un 1, resulta el séptimo (1+1+2+3+5 + 1 = 13).
- * Si se suman los tres primeros términos que ocupan posición impar (t_1,t_3,t_5) sale el sexto término (t_6), (1+2+5 = 8). Si se suma los cuatro primeros términos que ocupan posición impar (t_1,t_3,t_5,t_7) sale el octavo término (t_8), (1+2+5+13 = 21).
- * Si se suma los tres primeros términos que ocupan posición par (t_2,t_4,t_6) y añades 1, sale el séptimo término (t_7), (1+3+8 + 1 =13). Si se suman los cuatro primeros términos que ocupan posición par (t_2,t_4,t_6,t_8) y se añade 1, sale el noveno término (t_9), (1+3+8+21 + 1 =34).
- * Tomando dos términos consecutivos, por ejemplo: t_4=3 y t_5=5; elevando al cuadrado y sumando: $3^2+5^2=9+25=34$ que es el noveno término de la sucesión. Tomando t_6=8 y t_7=13; elevando al cuadrado y sumando: $8^2+13^2=64+169=233$ que es el decimotercer término de la sucesión.
- * Pero si se eleva al cuadrado los cinco primeros términos y se suman, resulta el producto del quinto y sexto término: $1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=40=5*8$. Si se hace lo mismo para los seis primeros términos, sale el producto del sexto y el séptimo término:$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2=104=8*13$.
- * Y quizás la más sorprendente sea la siguiente propiedad. Dividiendo dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor entre el menor y veamos lo que se obtiene:

1 : 1 = 1
2 : 1 = 2
3 : 2 = 1´5
5 : 3 = 1´66666666
8 : 5 = 1´6
13 : 8 = 1´625
21 :13 = 1´6153846....
34 :21 = 1´6190476....
55 :34 = 1´6176471....
89 :55 = 1´6181818....

Al tomar más términos de la sucesión y hacer su cociente nos acercamos al número de oro.

Cuanto mayores son los términos, los cocientes se acercan más a Φ =1,61803.... Está sucesión resolvió un problema de nacimiento de parejas de conejos, es decir, si encierras una pareja de conejos al cabo de un mes tendrán un conejo que a partir del mes siguiente también tendrá nuevas crías de conejo cada mes, y se quería saber cuántos conejos habían al año. Y así se obtiene la secuencia de 1, 1, 2, 3, 5, etcétera. En la que cada número, empezando por el tercero, equivale a la suma de los dos números anteriores llegando a la siguiente sucesión de números: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,…

Proporción áurea

Si se toma una recta AB y luego ponemos un punto C en una parte de la recta, de manera que el resultado de la división de AC/AB es igual al resultado de la división de CB/AC, se crea una proporción áurea. 

El punto C crea una sección áurea en el segmento rectilíneo AB si AC/AB = CB/AC, que se puede calcular de la siguiente manera: si AB = 1 y la longitud de AC = x, entonces AC/AB = CB/AC se convierte en x/1 = (1 - x)/x. Multiplicando ambos lados de esta ecuación por x, se tiene que $x^2 = 1 - x$ y por tanto $x^2 + x - 1 = 0$ Esta ecuación de segundo grado se puede resolver utilizando la fórmula cuadrática, que da

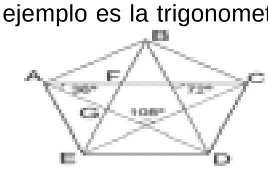
$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.6180339$$

Lo sorprendente ahora es calcular el valor que se obtiene al dividir el segmento mayor entre el menor,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(-1+\sqrt{5}).(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5}).(3+\sqrt{5})} = \frac{-3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{9-5} =$$
$$= \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'610... \longrightarrow \text{el numero de oro}$$

Es decir, la relación entre las dos partes en que se dividió el segmento es el número de oro.

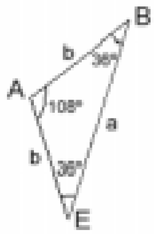
Otro ejemplo es la trigonometría y el número de oro. Si se considera un pentágono regular en el cual se dibujan las diagonales.



En la figura aparecen sólo tres ángulos diferentes. Los cuales miden 36º, 72º y 108º. La relación entre es ángulos es la siguiente: 72 es el doble de 36 y 108 es el triple de 36. Hay varios tipos diferentes de triángu isósceles, de los cuales se selecciona tres: los triángulos ABE, ABF y AFG. El resto de triángulos son semejan a alguno de estos y no aportan información adicional. Finalmente, hay cuatro segmentos diferentes en es triángulos, que llamaremos: BE=a, AB=AE=b, AF=BF=AG=c y GF=d. Las longitudes de estos segmen cumplen: a>b>c>d.

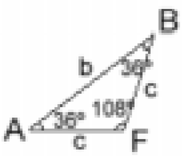
Consideremos cada uno de estos triángulos por separado y apliquemos el teorema del seno.

Triángulo ABE



$$\frac{a}{sen108^\circ}=\frac{b}{sen36^\circ}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{sen108^\circ}{sen36^\circ}$$

Triángulo ABF



$$\frac{b}{sen108^\circ}=\frac{c}{sen36^\circ}\rightarrow\frac{b}{c}=\frac{sen108^\circ}{sen36^\circ}$$

Triángulo AFG

$$\frac{c}{sen72^\circ}=\frac{d}{sen36^\circ}\rightarrow\frac{c}{d}=\frac{sen72^\circ}{sen36^\circ}=\frac{sen108^\circ}{sen36^\circ}$$

Como 72º=180º-108º, se verifica que sen72º=sen108º.

En consecuencia, se pueden establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{sen108^\circ}{sen36^\circ}=1,618033988...$$

Es decir, una vez ordenadas las longitudes de los cuatro segmentos de mayor a menor, la razón er cada una de ellas y la siguiente es constante e igual al número de oro.

Tomando la primera de las proporciones, teniendo en cuenta que c=a-b y haciendo b=1:

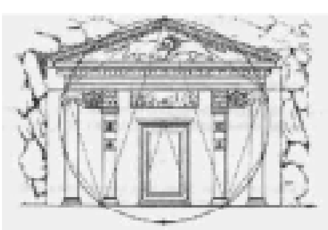
$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}\rightarrow\frac{a}{1}=\frac{1}{a-1}\rightarrow a^2-a-1=0\rightarrow a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ (el numero de oro)

Es decir, dos de estos segmentos consecutivos cumplen la proporción áurea.

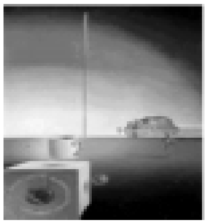
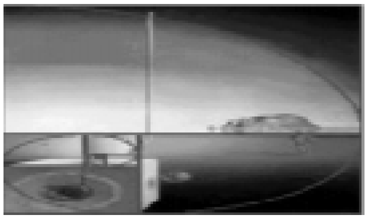
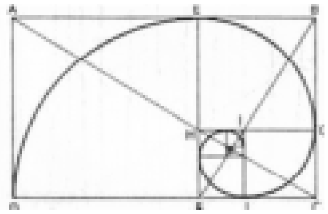
Como consecuencia, se verifica $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{sen108^\circ}{sen36^\circ}$.

El número de oro en el arte

Un ejemplo de rectángulo áureo en el arte es el alzado del Partenón griego. La gran pirámide de Keops, En un pentágono regular está basada la construcción de la Tumba Rupestre de Mira en Asia Menor.

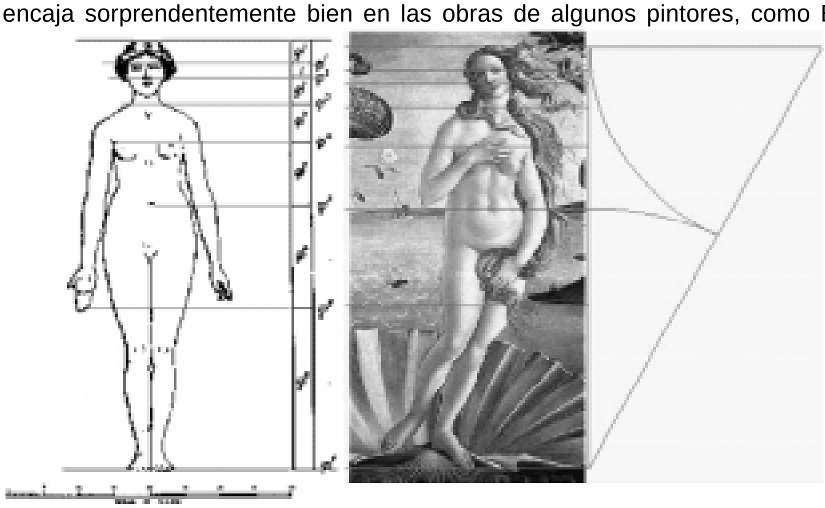


El cuadro de Dalí Leda atómica. Está basada en la proporción áurea, pero elaborada de tal forma que no es tan evidente. En otra obra de Dalí se toma el rectángulo áureo como formato del lienzo...

y además jugando claramente con el esquema de la espiral, en ésta obra es más evidente la proporción áurea, se observa de una forma tan clara, que a primera vista se puede ver la espiral logarítmica.

En las obras de muchos otros artistas del Renacimiento se han buscado relaciones áureas, sin conclusiones sobre su uso consciente. Sir Theodore Cook (s XIX) describió una escala simple de divisiones áureas aplicable a la figura, que encaja sorprendentemente bien en las obras de algunos pintores, como Boticelli



Se ha llegado a pensar que algunos compositores también llegaron a utilizar el número de oro en la música para sus creaciones.

Conclusión

Se dice que las obras artísticas y los cuerpos en la naturaleza, que guardan la proporción áurea son hermosas y armoniosas, en una palabra, agradables a la vista.

El número de oro, últimamente ha vuelto a llamar la atención, a partir de la publicación del libro *El Código Da Vinci* que despertó la curiosidad de verificar la veracidad de los datos y nombres que se mencionan en la obra.

Sea coincidencia o verdad, el número de oro se repite constantemente en la naturaleza, en el arte, en la arquitectura, en el cosmos y en los objetos que manejamos diariamente como nuestro credencial de elector y en las cajetillas de cigarros, también encontramos rectángulo áureo. Pero hay que resaltar que nada hay de misterioso en todo esto, ya que la relación con el número de oro surge muchas veces de las propiedades de los sistemas que se estudian, por lo que siempre tienen la sección áurea, o bien es una necesidad, por ejemplo en el caso de la distribución de las hojas de las plantas o las ramas, las hojas están dispuestas de este modo porque si estuvieran de otra manera, formando 90 grados, al acabar un giro las próximas hojas se sobrepondrían con las anteriores, y esto no es bueno para la planta, que necesita de la luz del sol, y el agua de lluvia, etcétera. Así que hay que encontrar el ángulo o la posición que aproveche el espacio con más eficacia. Y resulta que este ángulo está relacionado con la proporción áurea porque así es como se puede sobrevivir. Y es así como se encuentra en muchas otras cosas en la naturaleza, como el ejemplo de la cría de los conejos, se relacionan con la proporción áurea.

Ahora respecto de la relación del número de oro y la secuencia de Fibonacci se puede tomar lo mencionado por M. Livio que dijo:

En los girasoles, en la cabeza del girasol, se ven espirales en una dirección u otra. Y si las contáramos, veríamos que siempre son dos números de Fibonacci, en una dirección y en la otra. Lo más interesante es que si se parte de la secuencia de Fibonacci y se avanza lo suficiente en la secuencia, la razón de dos números adyacentes cualesquiera se acerca más y más a la proporción áurea (como se mostró en párrafos anteriores). Así que se puede decir que la secuencia de Fibonacci es la proporción áurea, pero disfrazada.

Referencias

H. E. Huntley, The divine proportion, Dover Publications. Inc.
Livio, M., The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number, Broadway Books, 2002.
Ing. Arturo Delgado Rodríguez, Reflexiones acerca de la sección áurea, Boletín Matemáticas y Cultura 148 - 151, Facultad de Ingeniería, UNA M (1995),
Miguel Lara Aparicio, Antología de las matemáticas, Introducción y selección, Edit. UNAM
http://www.math.ubc.ca/~hoek/Teaching/Golden/Divina.html
http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fibonacci.html
http://www.pauloporta.com/Fotografia/Artigos/epropaurea2.htm
http://www.rtve.es/